Klausur am 07.09.2019:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Induktionsanfang: Die Behauptung soll für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt werden. Deshalb ist im Induktionsanfang $n_0 = 1$. Dann gilt mit der Quotientenregel für die Ableitung

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x} = \frac{(-1)(x-1)}{e^x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit gilt der Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Sei nun $n \in \mathbb{N}$, und es gelte $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(x-n)}{e^x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Induktionsschritt: Es ist zu zeigen, dass für das n aus der Induktionsannahme gilt: $f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(x-(n+1))}{e^x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Sei nun also $x \in \mathbb{R}$. Es ist

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = \left(\frac{(-1)^n(x-n)}{e^x}\right)'.$$

Zur Berechnung der Ableitung benutzen wir die Quotientenregel und erhalten

$$\begin{aligned}\left(\frac{(-1)^n(x-n)}{e^x}\right)' &= (-1)^n\frac{e^x-(x-n)e^x}{(e^x)^2} = (-1)^n\frac{1-(x-n)}{e^x} = (-1)^n\frac{-x+(n+1)}{e^x}\\ &= (-1)^n\frac{(-1)(x-(n+1))}{e^x} = \frac{(-1)^{n+1}(x-(n+1))}{e^x}.\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt nun, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

Aufgabe 2

Die erweiterte Koeffizientenmatrix zum Gleichungssystem ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & | & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -1 & -1 & | & -1 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 2 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Um diese in Treppennormalform zu überführen, addieren wir die erste Zeile zur zweiten und subtrahieren die erste Zeile von der dritten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 3 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Nun vertauschen wir die zweite und die vierte Zeile.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Jetzt addieren wir die zweite Zeile zur ersten, subtrahieren das Siebenfache der zweiten Zeile von der dritten und addieren das Dreifache der zweiten Zeile zur vierten.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Wir vertauschen die dritte und vierte Zeile.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 5 \end{array}\right)$$

Zum Schluss multiplizieren wir die dritte Zeile mit (-1) und subtrahieren anschließend das Vierfache der dritten Zeile von der vierten.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Die Matrix ist jetzt in Treppennormalform. Wir lesen ab, dass der Rang der Koeffizientenmatrix 3 ist, während der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix 4 ist. Das Gleichungssystem ist also nicht lösbar, die Lösungsmenge ist die leere Menge $\emptyset$.

Aufgabe 3

1. (a) Die Abbildung $f : \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = ad + bc$ ist nicht linear. Es ist zum Beispiel $f(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = 1$, aber

$$f(2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}) = 4 \neq 2f(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}).$$

   (b) Die Abbildung $g : \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $g(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = a - 2(b + c) - d$ ist linear.

Seien $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$. Dann ist

$$\begin{aligned} g(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}) &= g(\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}) \\ &= a_1 + a_2 - 2(b_1 + b_2 + c_1 + c_2) - (d_1 + d_2) \\ &= (a_1 - 2(b_1 + c_1) - d_1) + (a_2 - 2(b_2 + c_2) - d_2) \\ &= g(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}) + g(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}). \end{aligned}$$

Außerdem gilt für $r \in \mathbb{R}$ und $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$

$$g(r\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = g(\begin{pmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{pmatrix}) = ra - 2(rb + rc) - rd = r(a - 2(b + c) - d) = rg(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}).$$

Damit ist g linear.

2. (a) Die Vektoren der Menge M_1 sind linear unabhängig. Um das zu zeigen seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b \\ -b \\ a - c \\ 3b + 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt $a+2b = 0, -b = 0, a-c = 0$ und $3b+2c = 0$. Aus der zweiten Gleichung folgt sofort $b = 0$ und damit aus der ersten Gleichung $a = 0$ und aus der vierten Gleichung $c = 0$. Also sind die Vektoren linear unabhängig.

(b) Die Vektoren aus der Menge M_2 sind linear abhängig. Um das zu zeigen, benötigt man eine Linearkombination der Vektoren, die den Nullvektor ergibt und in der nicht alle Koeffizienten gleich 0 sind. Entweder findet man diese Linearkombination durch Ausprobieren oder rechnet sie aus. Dazu seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b \\ -b + c \\ a - b + 3c \\ 5b - 5c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt $a+2b = 0, -b+c = 0, a-b+3c = 0$ und $5b-5c = 0$. Hier ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, das man mit den im Kurs gelernten Methoden lösen kann. Man sieht aber auch so ziemlich schnell, dass aus der zweiten und vierten Gleichung $b = c$ folgt. Das in die dritte Gleichung eingesetzt ergibt $a + 2b = 0$, also genau die erste Gleichung. Eine Lösung dieser Gleichung wäre $a = 2$ und $b = -1$. Mit $b = c$ folgt dan auch $c = -1$. Und tatsächlich ist

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit sind die Vektoren linear abhängig.

Aufgabe 4

Wir bestimmen ein Erzeugendensystem von $\text{Bild}(f)$, indem wir die kanonische Basis von $\mathbb{Q}^4$ in f einsetzen. Es gilt

$$f(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

also $\text{Bild}(f) = \langle \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \rangle$. Diese drei Vektoren sind linear unabhängig, denn aus $a\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\b\\a+b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ für $a, b, c \in \mathbb{Q}$ folgt $c = 0, b = 0, a + b = 0$ und damit sofort $a = b = c = 0$. Da diese drei Vektoren linear unabhängig sind, folgt $\text{Bild}(f) = \mathbb{Q}^3$ und $\text{Rg}(f) = 3$.

Aufgabe 5

Als Produkt und Verkettung stetiger Funktionen ist f für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig. Es muss also nur noch der Punkt 0 betrachtet werden. Da $|\sin(\frac{1}{x})|$ beschränkt ist und $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$ gilt, folgt auch $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x^3|\sin(\frac{1}{x})|) = 0 = f(0)$. Somit ist f stetig im Punkt 0 und damit auf ganz $\mathbb{R}$.

Aufgabe 6

Angenommen, f ist nicht injektiv. Dann existieren $x, y \in [a, b]$ mit $x < y$ und $f(x) = f(y)$. Mit dem Mittelwertsatz (oder dem Satz von Rolle) angewendet auf das Intervall $[x, y]$ gibt es ein $z \in (x, y)$ mit

$$f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 0.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass $f'(x_0) \neq 0$ für alle $x_0 \in (a, b)$ also insbesondere auch für alle $x_0 \in (x, y)$ gilt. Also ist f injektiv.

(f' kann durchaus unstetig sein, siehe z.B. die Klausur vom WS 17/18 – man kann also nicht sofort folgern, dass f' entweder strikt positiv oder strikt negativ sein und deshalb f streng monoton und daher injektiv sein muss. Erst **nachdem** wir die Injektivität gezeigt haben, folgt mit 15.2.12 auch die Monotonie und damit das eindeutige Vorzeichen von f'.)

Aufgabe 7

Mit dem Leibniz-Kriterium kann man zeigen, dass die Reihe konvergiert. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{n+1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend, denn

$$\frac{\frac{(n+1)+1}{(n+1)^2}}{\frac{n+1}{n^2}} = \frac{(n+2)n^2}{(n+1)^3} = \frac{n^3+2n^2}{n^3+3n^2+3n+1} < 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, also $a_{n+1} < a_n$. Außerdem konvergiert die Folge gegen 0, denn $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) = 0$. Mit dem Leibniz-Kriterium (bzw. der im Kurstext darauf folgenden Aufgabe) folgt nun, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n^2}$ konvergiert.

Die Reihe konvergiert aber nicht absolut, denn $\frac{n+1}{n^2} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist die harmonische Reihe eine divergente Minorante für

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n(n+1)}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2}.$$

Aufgabe 8

(a) Die Wahrheitstafel für α sieht folgendermaßen aus:

A	B	C	$A \to B$	$B \leftrightarrow C$	$(A \to B) \wedge (B \leftrightarrow C)$	$A \wedge B$	α
0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

Also ist α erfüllbar, aber nicht tautologisch, und nicht widerspruchsvoll.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\alpha &\approx ((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (B \vee \neg C)) \to (A \wedge B) \quad \text{(Junktorminimierung, Klammern)}\\
&\approx \neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (B \vee \neg C)) \vee (A \wedge B) \quad \text{(Junktorminimierung)}\\
&\approx \neg(((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)) \wedge (B \vee \neg C)) \vee (A \wedge B) \quad \text{Klammern}\\
&\approx (\neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)) \vee \neg(B \vee \neg C)) \vee (A \wedge B) \quad \text{(DeMorgan)}\\
&\approx (\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee C) \vee \neg(B \vee \neg C)) \vee (A \wedge B) \quad \text{(DeMorgan,Klammern)}\\
&\approx (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C) \vee (A \wedge B) \quad \text{(DeMorgan, Klammern).}
\end{aligned}$$

Dies ist eine disjunktive Normalform für α.