FernUniversität in Hagen

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität ·58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

FernUniversität in Hagen
FAKULTÄT für Mathematik und Informatik

KLAUSUR zum Kurs Mathematische Grundlagen (01141)
Sommersemester 2019

DATUM: 07.09.2019
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise

(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte das Adressfeld leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **40** Punkte erreichen.
5. Als Hilfsmittel erlaubt ist ein handgeschriebenes DIN-A4-Blatt mit eigenen Notizen.
6. Weitere Hilfsmittel dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit der Note 5,0 bewertet wird.

	Bemerkungen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Bearbeitet									
max. Punktezahl	10	10	12	8	10	10	10	10	80
erreichte Punktezahl									
Korrektur									

Prüfergebnis/Note	

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x}{e^x}$. Diese Funktion ist unendlich oft differenzierbar, was Sie nicht zeigen müssen. Zeigen Sie mit Induktion nach n, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ für die n-te Ableitung der Funktion $f^{(n)}$ gilt:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(x-n)}{e^x}.$$

[*10 Punkte*]

Aufgabe 2

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & - & x_5 & = & 0 \\ -x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & -1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 4x_4 & + & 2x_5 & = & 5 \\ & & & & x_3 & & & + & x_5 & = & 0. \end{array}$$

Berechnen Sie die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix und bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 3

1. Genau eine der beiden folgenden Abbildungen ist linear. Begründen Sie für beide Abbildungen, warum sie linear bzw. nicht linear sind.

   (a) $f : \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = ad + bc$,

   (b) $g : \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $g(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = a - 2(b + c) - d$.

2. Genau eine der beiden folgenden Mengen ist eine linear unabhängige Teilmenge von $\mathbb{R}^4$. Begründen Sie für beide Mengen, warum sie linear unabhängig bzw. linear abhängig sind.

(a) $M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$,

(b) $M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$.

[*6 + 6 = 12 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei $f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$ mit $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$. Diese Abbildung ist linear, was Sie nicht beweisen müssen. Bestimmen Sie $\mathrm{Rg}(f)$.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 5

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x^3 |\sin(\frac{1}{x})| & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Ist f stetig?

[*10 Punkte*]

Aufgabe 6

Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für alle $a < x < b$. Zeigen sie, dass f injektiv ist.

(Hinweis: Mittelwertsatz)

[*10 Punkte*]

Aufgabe 7

Gegeben sei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{n+1}{n^2}$. Zeigen Sie, dass diese Reihe konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 8

Gegeben sei die Formel $\alpha = ((A \to B) \wedge (B \leftrightarrow C)) \to (A \wedge B)$.

(a) Stellen Sie die Wahrheitstafel (mit Zwischenschritten) für α auf. Ist die Formel erfüllbar, tautologisch, widerspruchsvoll?

(b) Finden Sie eine konjunktive oder disjunktive Normalform für α.

[*5 + 5 = 10 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$