FernUniversität in Hagen

FernUniversität in Hagen
FAKULTÄT für Mathematik und Informatik

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität ·58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

KLAUSUR zum Kurs Mathematische Grundlagen (01141)
Sommersemester 2018

DATUM: 08.09.2018
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise

(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte das Adressfeld leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **40** Punkte erreichen.
5. Als Hilfsmittel erlaubt ist ein handgeschriebenes DIN-A4-Blatt mit eigenen Notizen.
6. Weitere Hilfsmittel dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit der Note 5,0 bewertet wird.

	Bemerkungen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Bearbeitet									
max. Punktezahl	8	16	10	10	8	8	10	10	80
erreichte Punktezahl									
Korrektur									

Prüfergebnis/Note	

Mathematische Grundlagen (01141) SoSe 2018

Klausur am 08.09.2018:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen begründet werden.

Aufgabe 1

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass f linear ist.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix A, so dass $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^4$ gilt.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $\text{Kern}(f)$.

(d) Zeigen Sie, dass f surjektiv, aber nicht injektiv ist.

(e) Bestimmen Sie ${}_{\mathcal{C}}\text{M}_{\mathcal{B}}(f)$ für $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ und $\mathcal{C} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

[*4 + 2 + 4 + 2 + 4 = 16 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $S = \{x_1, x_2, x_3\} \subseteq V$.

(a) Zeigen Sie: $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle = \langle x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1 \rangle$.

(b) Gilt immer $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle = \langle x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1 \rangle$?

[*6 + 4 = 10 Punkte*]

Aufgabe 4

Geben Sie jeweils ein Beispiel (mit kurzer Begründung) für

(a) ein lineares Gleichungssystem mit unendlich vielen Lösungen.

(b) eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, die einen Häufungspunkt besitzt, der nicht in der Menge enthalten ist.

(c) reelle Zahlen a und b, so dass $\int_a^b e^{-x}dx = 1$ gilt.

[*3 + 3 + 4 = 10 Punkte*]

Aufgabe 5

Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f_a : [0, \pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{\cos(x)}, & x \neq \frac{\pi}{2} \\ a, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

stetig?

[*8 Punkte*]

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \sin(x) - e^{-x}$ im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ genau eine Nullstelle besitzt.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 7

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n}\right) x^n?$$

[*10 Punkte*]

Aufgabe 8

Gegeben sei die aussagenlogische Formel

$$\alpha = (A \to (B \wedge \neg C)) \to (\neg B \to (\neg A \vee C)).$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel (mit Zwischenschritten), dass α eine Tautologie ist.

(b) Formen Sie α mit Hilfe von Äquivalenzregeln in eine Negationsnormalform um.

[*5 + 5 = 10 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$