Mathematische Grundlagen (01141) **WS 2017/18**

Klausur am 10.03.2018:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Induktionsanfang: Es sei $n_0 = 1$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 \leq 1^3 = n_0^3 \;,$$

also gilt der Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Wir nehmen an, dass $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \leq n^3$ für ein $n \geq 1$ gilt. Daraus müssen wir (im Induktionsschritt) schließen, dass $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^2 \leq (n+1)^3$ folgt. Mit der Induktionsannahme ist aber tatsächlich

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 && \text{(Aufspalten der Summe)}\\
&\leq n^3 + (n+1)^2 && \text{(Induktionsannahme)}\\
&= n^3 + n^2 + 2n + 1 \leq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3 \;.
\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Aufgabe 2

Die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ des linearen Gleichungssystems ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & 2\\ 2 & 1 & 4 & 3 & | & 5\\ 1 & -1 & -1 & \beta & | & 1 \end{pmatrix} \;.$$

Wir subtrahieren von der dritten Zeile die erste und von der zweiten Zeile das doppelte der ersten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 1\\ 0 & -1 & -2 & \beta-1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

und addieren die zweite Zeile zur dritten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 1\\ 0 & 0 & 0 & \beta & | & 0 \end{pmatrix} \;. \qquad (*)$$

Im Fall $\underline{\beta \neq 0}$ dividieren wir die letzte Zeile durch β, subtrahieren sie anschließend von der ersten und von der zweiten Zeile und erhalten die Treppennormalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \;.$$

Es gilt $\mathrm{Rg}(A|b) = \mathrm{Rg}(A) = 3$, das Gleichungssystem ist also lösbar; zum Auffüllen auf Dreiecksform fügen wir eine Nullzeile und dann auf der Diagonalen -1 ein

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

und lesen daraus die Lösungsmenge ab:

$$\mathcal{L}_{\beta\neq 0} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} .$$

Im Fall $\underline{\overline{\beta = 0}}$ haben wir in $(*)$ bereits die Treppennormalform erreicht; es gilt $\mathrm{Rg}(A|b) = \mathrm{Rg}(A) = 2$, das Gleichungssystem ist also wiederum lösbar. Zum Auffüllen auf Dreiecksform fügen wir eine (weitere) Nullzeile und auf der Diagonalen (zweimal) -1 ein

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

und lesen daraus die Lösungsmenge ab:

$$\mathcal{L}_{\beta=0} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\} .$$

Aufgabe 3

(i) Die Behauptung stimmt; ein Beispiel ist $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$f_1(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathrm{Kern}(f_1) = \mathrm{Bild}(f_1) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle .$$

(ii) Wenn es ein solches f_2 mit $\mathrm{Kern}(f_2) = \mathrm{Bild}(f_2)$ gäbe, müsste nach dem Rangsatz gelten $\dim(M_{33}(\mathbb{R})) = 9 = \dim(\mathrm{Kern}(f_2)) + \dim(\mathrm{Bild}(f_2)) = 2 \cdot \dim(\mathrm{Kern}(f_2))$; die Behauptung ist also für alle Vektorräume mit ungerader Dimension falsch.

(iii) Hier liefert der Rangsatz keine Aussage, da $\mathbb{K}[T]$ nicht endlich erzeugt ist. Die Behauptung ist aber wahr, und (i) liefert eine Idee für ein Beispiel. Ein mögliches passendes $f_3 : \mathbb{K}[T] \to \mathbb{K}[T]$ ist definiert durch

$$f_3(T^i) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i \text{ ungerade} \\ T^{i+1} & \text{für} \quad i \text{ gerade} \end{cases} ,$$

also $f_3(1) = T, f_3(T) = 0, f_3(T^2) = T^3, f_3(T^3) = 0$ usw. und somit (wegen der geforderten Linearität) für jedes $p = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i$

$$f_3(p) = \sum_{i=0}^{n} a_i f_3(T^i) = \sum_{0 \le 2k \le n} a_{2k} T^{2k+1} \ ,$$

und es ist $\text{Kern}(f_3) = \text{Bild}(f_3) = \langle \{T^i | i \in \mathbb{N} \text{ ungerade}\} \rangle$. (Wie bei endlich erzeugten Vektorräumen ist eine lineare Abbildung durch die Werte auf einem Erzeugendensystem eindeutig festgelegt - auch wenn wir die Begriffe Basis und Lineare Unabhängigkeit nur für endliche Erzeugendensysteme verwendet haben.)

Aufgabe 4

(i),(ii) Die Kehrwertfunktion ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, Polynome und die Sinusfunktion sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar. Nach den Rechenregeln für stetige und differenzierbare Funktionen ist f damit stetig und differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sei nun (x_n) eine Nullfolge in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; dann gilt $|\sin(\frac{1}{x_n})| \le 1$ und damit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 \sin(\frac{1}{x_n}) - 0}{x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n \sin(\frac{1}{x_n}) = 0 \ ,$$

also ist f auch differenzierbar in 0 mit $f'(0) = 0$ und damit differenzierbar und automatisch auch stetig auf ganz $\mathbb{R}$. (Die Stetigkeit in 0 hätte man natürlich auch wie die Differenzierbarkeit über die entsprechende Grenzwertbetrachtung für $x_n^2 \sin(\frac{1}{x_n})$ erhalten können.)

(iii) Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt nach Produkt- und Kettenregel der Differentialrechnung

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\sin(x^{-1}) + x^2 \left(\sin(x^{-1})\right)' = 2x\sin(x^{-1}) + x^2\cos(x^{-1}) \cdot (-x^{-2}) \\ &= 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) \ . \end{aligned}$$

Wenn wir also (nur als eines von vielen möglichen Beispielen) die Nullfolge $(x_n) = \left(\frac{1}{n\pi}\right)$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ betrachten, erhalten wir $f'(x_n) = \frac{2}{n\pi}\sin(n\pi) - \cos(n\pi)$. Hier ist der erste Summand stets gleich 0 (wegen $\sin(n\pi) = 0$), während $\cos(n\pi) = (-1)^n$ gilt; die Folge $f'(x_n)$ konvergiert also nicht, und f' ist nicht stetig (noch nicht einmal konvergent) in 0.

Aufgabe 5

Wir betrachten für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n : [-1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = (1+x)^n - 1 - nx$. Als Polynom ist diese Funktionen auf ihrem Definitionsgebiet beliebig oft differenzierbar. Nun müssen wir unterscheiden:

Für $n = 1$ haben wir $f_1(x) = 1 + x - 1 - x = 0$, also auch $f_1(x) \ge 0$ auf ganz $[-1, \infty)$. Für $n \ge 2$ ist $f_n'(x) = n(1+x)^{n-1} - n = n((1+x)^{n-1} - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (der einzige andere Kandidat für eine Nullstelle wäre $x = -2$ außerhalb des Definitionsgebietes), und es gilt weiter $f_n''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$ und somit $f_n''(0) = n(n-1) > 0$; also ist 0 ein lokales Minimum und (da es kein weiteres Extremum im Definitionsgebiet gibt) auch das globale Minimum von f_n, mit $f_n(0) = 0$. Damit gilt auch für $n \ge 2$ auf ganz $[-1, \infty)$, dass

$f_n(x) \geq 0$. Somit gilt die behauptete Bernoullische Ungleichung für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf ganz $[-1, \infty)$.

Aufgabe 6

i) Die Folge $(x_n) = (\sqrt[n]{n})$ konvergiert laut Kurs gegen 1, also gibt es (z.B.) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $0 < \sqrt[n]{n} \leq 2$ und somit $\frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \geq \frac{1}{2n}$ für alle $n \geq n_0$ (und damit: fast immer). Da die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, divergiert auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ und nach dem Minorantenkriterium dann auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.

ii) Wie i), aber mit anderem Ergebnis: Die Folge $(x_n) = (\sqrt[n]{n})$ konvergiert gegen 1, also gibt es (z.B.) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $0 < \sqrt[n]{n} \leq 2$ und somit $\frac{\sqrt[n]{n}}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}$ für alle $n \geq n_0$ (und damit: fast immer). Da die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ und nach dem Majorantenkriterium dann auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$.

Aufgabe 7

Die vermutlich einfachste (von mehreren möglichen) Substitutionen ist $x + 1 = g(x)$, also $x = g(x) - 1, g'(x) = 1, g(0) = 1, g(1) = 2$; damit erhalten wir $x\sqrt{x+1} = (g(x) - 1)\sqrt{g(x)}$, also mit der Substitutionsregel

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx &= \int\limits_0^1 (g(x)-1)\sqrt{g(x)}g'(x)\,dx = \int\limits_1^2 (u-1)\sqrt{u}\,du = \int\limits_1^2 (u^{3/2} - u^{1/2})\,du \\
&= \left(\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2}\right)\Big|_1^2 = \frac{2\cdot 4\sqrt{2}}{5} - \frac{2\cdot 2\sqrt{2}}{3} - \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) \\
&= 4\sqrt{2}\cdot\frac{6-5}{15} - \frac{6-10}{15} = \frac{4\sqrt{2}}{15} + \frac{4}{15} = \frac{4}{15}(\sqrt{2}+1)\ .
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8

Wir erhalten (wobei wir am Anfang der Deutlichkeit halber noch Klammern setzen)

$$
\begin{array}{rcll}
\alpha & = & (A \wedge \neg B) \to (C \wedge D) & \\
& \approx & (C \wedge D) \vee (\neg(A \wedge \neg B)) & \text{Junktorminimierung} \\
& \approx & (C \wedge D) \vee (\neg A \vee \neg(\neg B)) & \text{de Morgan} \\
& \approx & (C \wedge D) \vee (\neg A \vee B) & \text{doppelte Verneinung} \\
& \approx & (C \wedge D) \vee \neg A \vee B & \text{Klammern weglassen .}
\end{array}
$$

Dies ist eine Disjunktion von Monomen, also eine disjunktive Normalform von α.

Wenn wir oben in der 4. Zeile wieder einsteigen (wo wir eine Negationsnormalform erreicht hatten), erhalten wir

$$
\begin{array}{rcll}
\alpha & \approx & (C \wedge D) \vee (\neg A \vee B) & \\
\alpha & \approx & (C \vee (\neg A \vee B)) \wedge (D \vee (\neg A \vee B)) & \text{Distributivgesetz} \\
\alpha & \approx & (C \vee \neg A \vee B) \wedge (D \vee \neg A \vee B) & \text{Klammern weglassen .}
\end{array}
$$

Das ist eine Konjunktion von Klauseln, also eine konjunktive Normalform von α.