FernUniversität in Hagen

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität ·58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

FernUniversität in Hagen
FAKULTÄT für Mathematik und Informatik

KLAUSUR zum Kurs Mathematische Grundlagen (01141)
WS 2017/18

DATUM: 10.03.2018
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise

(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte das Adressfeld leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **40** Punkte erreichen.
5. Erlaubt ist ein handgeschriebenes DIN-A4-Blatt mit eigenen Notizen.
6. Weitere Aufzeichnungen oder Hilfsmittel wie Studienbriefe, Glossare, Bücher, Taschenrechner, etc. dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit 5 bewertet wird.

	Bemerkungen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8		Summe
Bearbeitet										
max. Punktezahl	6	12	14	14	8	10	8	8		80
erreichte Punktezahl										
Korrektur										

Prüfergebnis/Note	

Klausur am 10.03.2018:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Ungleichung für die Summe der ersten n Quadratzahlen gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \leq n^3 \ .$$

[*6 Punkte*]

Aufgabe 2

Berechnen Sie in Abhängigkeit von $\beta \in \mathbb{R}$ die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix und ggf. die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

[*12 Punkte*]

Aufgabe 3

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils: Es gibt eine lineare Abbildung $f_i : V_i \to V_i$ mit Bild(f_i)=Kern(f_i)

i) für $V_1 = \mathbb{R}^2$,

ii) für $V_2 = M_{33}(\mathbb{R})$,

iii) für $V_3 = \mathbb{K}[T]$.

(Bei Angabe eines korrekten Beispiels für einen Beweis müssen Sie die Linearität nicht nachrechnen, aber Bild und Kern - ebenfalls ohne Beweis - korrekt angeben.)

[*4 + 4 + 6 = 14 Punkte*]

Aufgabe 4

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für} \quad x \neq 0 \end{cases} .$$

i) Zeigen Sie: f ist stetig auf $\mathbb{R}$.

ii) Zeigen Sie: f ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

iii) Ist f' stetig in $x_0 = 0$?

[*4 + 4 + 6 = 14 Punkte*]

Aufgabe 5

Beweisen Sie die Bernoullische Ungleichung

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad \text{für} \quad x \geq -1\,,\ n \in \mathbb{N}$$

nicht mit vollständiger Induktion, sondern mit den Mitteln der Differentialrechnung (angewendet auf die Differenz der beiden Seiten).

[*8 Punkte*]

Aufgabe 6

Untersuchen Sie die Reihen

$$i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}\,, \qquad ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$$

auf Konvergenz.

[*5 + 5 = 10 Punkte*]

Aufgabe 7

Berechnen Sie

$$\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx\ .$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 8

Gegeben sei die Formel

$$\alpha = A \wedge \neg B \to C \wedge D\ .$$

Bestimmen Sie eine konjunktive und eine disjunktive Normalform von α und geben Sie jeweils die vorgenommenen Äquivalenzumformungen an.

[*8 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$