Aufgabe 1.

5 Punkte Sei $x \in]0,1[$. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(1-x)^n \geq 1 - nx.$$

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen die Behauptung per vollständiger Induktion über n.

Für $n = 0$ gilt

$$(1-x)^0 = 1 \geq 1 - 0.$$

Damit ist die Verankerung erbracht.

Sei nun $n > 0$ und gelte die Behauptung für $n-1$, d.h. es gilt

$$(1-x)^{n-1} \geq 1 - (n-1)x. \tag{IV}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
(1-x)^n &= (1-x)^{n-1}(1-x) \\
&\overset{IV}{\geq} (1-(n-1)x)(1-x) \qquad (1) \\
&= 1-(n-1)x - x + (n-1)x^2 \\
&\overset{n>0}{\geq} 1 - nx.
\end{aligned}$$

Dabei wurde im Schritt (1) zusätzlich verwendet, dass $x < 1$ gilt. Also gilt die Behauptung auch für n. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2.

Auf einer Jubiläumsfeier der FernUni wird folgendes Glücksspiel angeboten. In einer roten Box befinden sich drei Zettel, jeweils einer davon wurde mit „W “, einer mit „ I “ und einer mit „N “ beschriftet. In einer weiteren, blauen Box befinden sich insgesamt sechs Zettel, davon wurden jeweils zwei mit „W “, „I “ und „N “ beschriftet. Sie dürfen sich nun für eine Box entscheiden und aus dieser nacheinander, ohne Zurücklegen drei Zettel ziehen. Sie gewinnen, wenn Sie die Zettel „W I N “ in genau dieser Reihenfolge ziehen.

3 Punkte (a) Für welche Box entscheiden Sie sich?

Lösungsvorschlag:

Sei R das Ereignis aus der roten Box die Zettel „WIN “ in dieser Reihenfolge zu ziehen und B das Ereignis aus der blauen Box die entsprechenden Zettel zu ziehen. Dann gilt

$$p(R) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6},$$
$$p(B) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{15}.$$

Wenn man sich also für die rote Box entscheidet, sind die Gewinnchancen mehr als doppelt so groß.

2 Punkte (b) Ändert sich etwas, wenn man mit Zurücklegen ziehen darf?

Lösungsvorschlag:

Ziehen wir mit Zurücklegen, so ergeben sich für die oben definierten Wahrscheinlichkeiten

$$p(R) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27} = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = p(B).$$

In diesem Fall ist es also egal für welche Box man sich entscheidet.

Aufgabe 3.

Wir definieren auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ folgende Relation

$$(p,q) \sim (r,s) :\Leftrightarrow ps = qr.$$

Zeigen Sie:

4 Punkte (a) $\sim$ definiert eine Äquivalenzrelation.

Lösungsvorschlag:

Für $(p,q),(r,s),(t,u) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ gilt:

Reflexivität: $(p,q) \sim (p,q)$, da $pq = qp$ gilt.

Symmetrie: Es gilt $(p,q) \sim (r,s) \Leftrightarrow ps = qr \Leftrightarrow rq = sp \Leftrightarrow (r,s) \sim (p,q)$.

Transitivität: Aus $(p,q) \sim (r,s)$ und $(r,s) \sim (t,u)$ folgt $ps = qr$ und $ru = st$.
Multiplizieren wir die erste Gleichung mit u und die zweite mit q erhalten wir

$$ups = uqr = qst,$$

also

$$0 = ups - qst = s(up - qt).$$

Da aber $s \neq 0$ gilt, muss $pu = qt$, also $(p,q) \sim (t,u)$ gelten.

Da die Relation somit reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, ist sie eine Äquivalenzrelation.

3 Punkte (b) Die Äquivalenzklassen von $\sim$ lassen sich bijektiv auf $\mathbb{Q}$ abbilden.

Lösungsvorschlag:

Wir definieren $\phi : (\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}))/ \sim \longrightarrow \mathbb{Q}$ wie folgt

$$\phi([(p,q)]) := \frac{p}{q}.$$

Nun ist ϕ offenbar surjektiv.
Weiter gilt

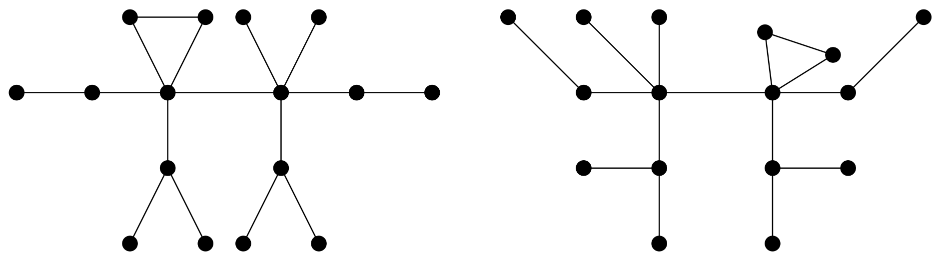
$$[(p,q)] = [(r,s)] \Leftrightarrow (p,q) \sim (r,s) \Leftrightarrow ps = qr \Leftrightarrow \frac{p}{q} = \frac{r}{s} \Leftrightarrow \phi([(p,q)]) = \phi([(r,s)]).$$

Liest man obige Äquivalenzen von links nach rechts erhält man die Wohldefiniertheit, liest man dagegen von rechts nach links, folgt die Injektivität.

Bemerkung: Diese Relation wird zur konstruktiven Definition von $\mathbb{Q}$ verwendet.

Aufgabe 4.

Betrachten Sie die im Folgenden abgebildeten Graphen G_1 und G_2.



G_1 G_2

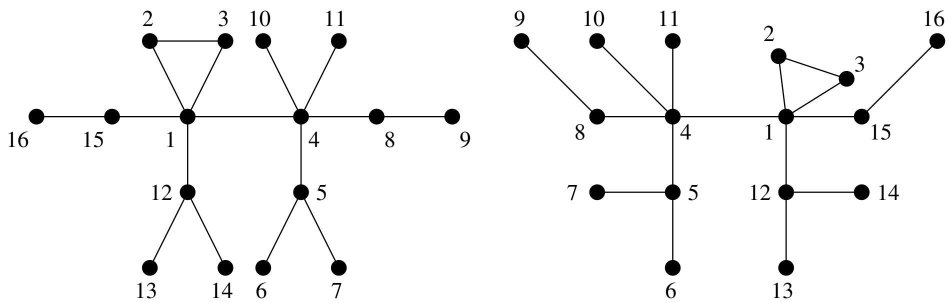
5 Punkte Zeigen oder widerlegen Sie: G_1 und G_2 sind isomorph.

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen, dass G_1 und G_2 isomorph sind.

Dazu bemerkt man zunächst, dass die beiden Dreiecke so aufeinander abgebildet werden müssen, dass die jeweiligen Knoten vom Grad 5 aufeinander abgebildet werden. Die jeweiligen anderen Knoten vom Grad 5 müssen ebenfalls aufeinander abgebildet werden.

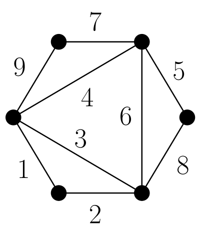
Die Knotennummerierungen in den folgenden Abbildungen geben einen aus dieser Konstruktion resultierenden möglichen Isomorphismus an.



G_1 G_2

Aufgabe 5.

Betrachten Sie den folgenden Graphen G mit den angegebenen Kantengewichten.



G

2 Punkte (a) Zeigen oder widerlegen Sie: Der Graph G ist eulersch.
Geben Sie ggf. eine Eulertour an.

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen, dass G eulersch ist.

Da G zusammenhängend ist und alle Knotengrade gerade (2 oder 4) sind, ist G eulersch.

Eine Eulertour findet man nach dem Algorithmus aus dem Kurstext etwa wie folgt. (Wir starten hier vom linken Knoten und nehmen im Falle einer Wahlmöglichkeit jeweils die Kanten mit kleinerem Gewicht. Da die Kantengewichtsfunktion von G injektiv ist, benennen wir die Kanten nach ihren Gewichten.)

$$1-2-3-4-5-8-6-7-9$$

1 Punkt (b) Zeigen oder widerlegen Sie: Der Graph G ist 2-zusammenhängend.

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen, dass G 2-zusammenhängend ist.

Eine Ohrenzerlegung (C_0, P_1, P_2, P_3) von G besteht (mit den gleichen Kantenbenennungen wie in (a)) etwa aus dem Kreis

$$C_0 = \{1, 2, 8, 5, 7, 9\}$$

und den Wegen $P_1 = \{3\}$, $P_2 = \{4\}$ und $P_3 = \{6\}$.

Da G eine Ohrenzerlegung besitzt, ist G 2-zusammenhängend.

1 Punkt (c) Zeigen oder widerlegen Sie: Der Graph G ist 3-zusammenhängend.

Lösungsvorschlag:

Die Behauptung ist falsch.

Der Graph G ist nicht 3-zusammenhängend, da er in zwei nicht zusammenhängende Teile zerfällt, wenn man zwei der Knoten vom Grad 4 entfernt.

2 Punkte (d) Bestimmen Sie die minimale Anzahl m_B von Kanten, die man aus G entfernen muss, damit ein kreisfreier Graph entsteht.
Beweisen Sie die Minimalität Ihrer gefundenen Kantenanzahl.

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen: $m_B = 4$.

Zunächst einmal gilt $m_B \leq 4$, denn wenn wir die vier Kanten mit den Gewichten 3, 4, 5 und 6 entfernen, bleibt ein P_6 übrig. Als Baum ist dieser kreisfrei.

Desweiteren hat jeder kreisfreie Graph $G' = (V', E')$ höchstens $|V'| - 1$ viele Kanten, da jeder Baum nach Satz 4.1.5 genau $|V'| - 1$ viele Kanten hat. Also folgt auch

$$m_B \geq 9 - (6 - 1) = 4.$$

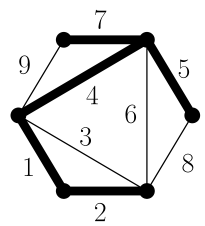
2 Punkte (e) Bestimmen Sie einen minimalen aufspannenden Baum in G bezüglich der angegebenen Kantengewichte und begründen Sie dessen Minimalität.

Lösungsvorschlag:

Mit dem Verfahren von Kruskal sortieren wir die Kanten in aufsteigender Reihenfolge, gehen diese der Reihe nach durch und fügen die Kanten hinzu, die keine Kreise schließen, also die mit den Gewichten

$$1, 2, 4, 5, 7.$$

In der Zeichnung unten ist dieser aufspannende Baum fett eingezeichnet. Er ist nach Satz 4.4.5 minimal.



2 Punkte (f) Zeigen oder widerlegen Sie: In G ist jeder Knoten von jedem anderen durch einen Spaziergang der Länge 2 erreichbar.

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen, dass jeder Knoten a jeden Knoten b über einen Spaziergang der Länge 2 erreicht.

Falls $a = b$, so existiert ein Nachbar c von a und der Spaziergang acb der Länge 2.

Falls a ein Knoten vom Grad 4 und b ein weiterer Knoten vom Grad 4 ist, gibt es z.B. den Spaziergang acb der Länge 2, wobei c der dritte Knoten vom Grad 4 ist.

Falls a ein Knoten vom Grad 4 und b ein Knoten vom Grad 2 ist, so besitzen a und b mindestens einen gemeinsamen Nachbarn c vom Grad 4, mit diesem ist dann acb ein Spaziergang der Länge 2.

Falls a und b zwei verschiedene Knoten vom Grad 2 sind, so besitzen sie genau einen gemeinsamen Nachbarn c vom Grad 4, mit diesem ist dann acb ein Spaziergang der Länge 2.

4 Punkte (g) Ein *Automorphismus* eines Graphen $H = (V(H), E(H))$ ist ein Isomorphismus, der $V(H)$ auf sich selbst abbildet.
Zeigen Sie: Zu dem Graphen G existieren genau 6 Automorphismen.

Lösungsvorschlag:

Zunächst einmal müssen in jedem Isomorphismus die Bilder der Knoten vom Grad 4 wieder Grad 4 haben und die der Knoten vom Grad 2 wieder Grad 2. Somit muss das innere Dreieck, welches aus den Knoten vom Grad 4 besteht, auf sich selbst abgebildet werden.

Sind a, b, c die Knoten vom Grad 4, so können wir das innere Dreieck auf höchstens 6=3! verschiedene Weisen umgruppieren. Es gibt also höchstens 6 Automorphismen.

Es gibt auch tatsächlich 6 Automorphismen des inneren Dreiecks: Die drei Rotationen $abc = \mathrm{id}$, $bca = (abc)$ und $cab = (acb)$ sowie die drei Spiegelungen $acb = (bc)$, $cba = (ac)$ und $bac = (ab)$. Diese können zu Automorphismen von G auf genau eine Weise fortgesetzt werden, da die Bilder der Knoten vom Grad 2 adjazent zu den beiden Bildern ihrer beiden Nachbarn vom Grad 4 sein müssen.

Aufgabe 6.

Eine *Blattkante* in einem Baum ist eine Kante, bei der einer der Endknoten ein Blatt ist. Ist v ein innerer Knoten eines Baumes, so heißt die Menge aller zu v inzidenten Blattkanten eine *Blattgarbe*.

4 Punkte (a) Sei T ein Baum. Zeigen Sie, dass es ein maximales Matching von T gibt, welches von den Kanten jeder Blattgarbe genau eine Kante enthält (und möglicherweise noch weitere Kanten aus T).

Lösungsvorschlag:

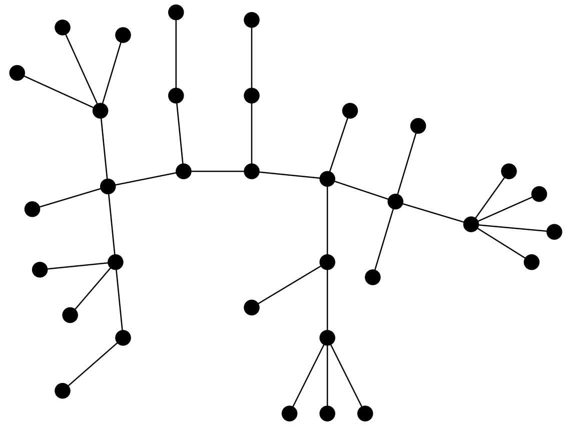
Zunächst einmal ist für ein beliebiges Matching klar, dass es von jeder Blattgarbe höchstens eine Matchingkante enthalten kann.

Sei M ein maximales Matching und k die Anzahl der Blattgarben, bei denen keine Kante in M liegt. Wir zeigen die Behauptung, dass es ein maximales Matching gibt, welches von jeder Blattgarbe mindestens eine Kante enthält, per Induktion über k.

($k = 0$) Falls $k = 0$ ist, so gilt die Behauptung nach Definition von k. Damit ist die Verankerung erbracht.

($k - 1 \longrightarrow k$) Sei nun $k > 0$ und gelte die Behauptung für $k - 1$. Dann existiert eine Blattgarbe, deren Blattkanten nicht zu M gehören. Sei v der zu der Blattgarbe gehörende innere Knoten und f eine zu v inzidente Blattkante. Da das Matching M maximal ist, ist v gematcht (ansonsten wäre $M \cup \{f\}$ ein größeres Matching im Widerspruch zur Maximalität von M). Da v nicht innerhalb der Blattgarbe gematcht ist, ist es mit einem inneren Knoten $w \neq v$ gematcht. Sei $e := vw$. Also ist $M' := (M \setminus \{e\}) \cup \{f\}$ ein maximales Matching von T mit genau $k - 1$ Blattgarben, bei denen keine Kante in M' liegt. Nach Induktionsvoraussetzung existiert also ein maximales Matching, welches von jeder Blattgarbe mindestens eine Kante enthält.

4 Punkte (b) Bestimmen Sie ein maximales Matching von dem unten abgebildenten Graphen T_0 und beweisen Sie dessen Maximalität.



T_0

Lösungsvorschlag:

Aus (a) lässt sich folgender rekursive Algorithmus zum Bestimmen eines maximalen Matchings M eines Baumes T ableiten:

(1) $M := \emptyset$

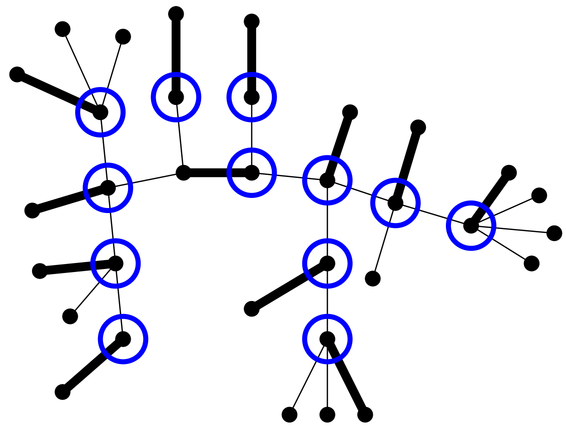
(2) Falls T keine Kanten hat, ABBRUCH: gib M aus.

(3) Füge aus jeder Blattgarbe von T eine Kante zu M hinzu.

(4) Lösche in T die Knoten, die zu den Kanten der Blattgarben gehören.

(5) gehe zu (2)

Wenden wir diesen Algorithmus auf T_0 an, so finden wir das in der folgenden Abbildung eingezeichnete Matching (die Gesamtheit der fetten Kanten). Die umkreisten Knoten bilden eine Knotenüberdeckung. Da die Anzahl der Matchingkanten gleich der Anzahl der Überdeckungsknoten ist, ist das Matching maximal und die Knotenüberdeckung minimal.



Bemerkung: Mit dieser Idee lässt sich auch ganz allgemein die Korrektheit des obigen Algorithmus beweisen: Wählen wir in jeder Rekursionsebene in Schritt (3) zu jeder Blattgarbe jeweils den zu der Blattgarbe gehörenden inneren Knoten aus, so ist die Gesamtheit der ausgewählten Knoten eine Knotenüberdeckung und die Anzahl dieser Knoten ist gleich der Anzahl der Matchingkanten.

Aufgabe 7.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

3 Punkte (a) Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung von A.

Lösungsvorschlag:

Wir berechnen die LU-Zerlegung von A. Dazu bringen wir die Matrix A mit Hilfe des Gauß-Algorithmus in obere Dreiecksform und notieren die verwendeten Umrechnungsschritte.

$$\left|\begin{matrix} \boxed{2} & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 7 \end{matrix}\right| \longrightarrow \left|\begin{matrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & \boxed{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 7 \end{matrix}\right| \longrightarrow \left|\begin{matrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 7 \end{matrix}\right|$$

$$\longrightarrow \left|\begin{matrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{matrix}\right|$$

Damit erhalten wir die LU-Zerlegung $PA = LU$ mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

und P als Einheitsmatrix.

5 Punkte (b) Bestimmen Sie die Konditionszahl $\operatorname{cond}_1(A)$ bezüglich der Spaltensummennorm $\|\cdot\|_1$.

Lösungsvorschlag:

Wir bestimmen zunächst einmal die Inverse A^{-1} von A. Da die Matrizen L und U aus (a) regulär sind, existiert A^{-1}.

Aufgrund der Blockdiagonalgestalt von A gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & B_2^{-1} \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen zunächst die Inverse von B_1:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{array}\right)$$

Also ist

$$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Zur Berechnung der Inverse von B_2 gehen wir analog vor:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -4 & 1 & 0 \\ -5 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

Also ist

$$B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Alternativ kann man für die Berechnung von B_1^{-1} und B_2^{-1} auch die Formel

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad B^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

benutzen, die für jede reguläre (2×2)-Matrix B gilt.

Setzen wir die Ergebnisse aus (2) und (3) in (1) ein, so erhalten wir

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Somit errechnen sich

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max\{2+5+0+0, 3+7+0+0, 0+0+3+|-5|, 0+0+|-4|+7\} \\ &= \max\{7, 10, 8, 11\} = 11, \\ \|A^{-1}\|_1 &= \max\{|-7|+5+0+0, 3+|-2|+0+0, 0+0+7+5, 0+0+4+3\} \\ &= \max\{12, 5, 12, 7\} = 12, \\ \mathrm{cond}_1(A) &= \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = 11 \cdot 12 = 132. \end{aligned}$$

3 Punkte (c) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (2, 1, 0, 0)^\top$.

Lösungsvorschlag:

Auf Grund der Blockdiagonalgestalt von A, genügt es das Gleichungssystem

$$B_1(x_1,x_2)^\top = (2,1)^\top$$

mit B_1 aus (b) zu lösen.

Nach (a) ist die LU-Zerlegung $B_1 = L_1U_1$ von B_1

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}}_{B_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{L_1}\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{U_1}$$

Wir lösen zunächst $L_1y = (2,1)^\top$:

$$(y_1,y_2)^\top = (2,-4)^\top$$

Dann lösen wir $U_1x = y = (2,-4)^\top$:

$$(x_1,x_2)^\top = (-11,8)^\top$$

Die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ lautet also

$$x = (-11,8,0,0)^\top.$$

Aufgabe 8.

5 Punkte Sei $f : [0,40] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = |x-4| + |x-8| + 3\cdot|x-10|.$$

Bestimmen Sie eine Approximation für ein Minimum von f auf dem Intervall $[0,40]$ mittels einer Fibonaccisuche mit 2 Schritten.

Lösungsvorschlag:

Wir bestimmen zunächst die Fibonaccizahlen bis $F_{2+3} = F_5$:

$$F_0 = 1, F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, F_5 = 8.$$

Die Schritte der Fibonaccisuche lauten dann

Schritt	a	x	y	b	$f(x)$	$f(y)$
1	0	15	25	40	33	83
2	0	10	15	25	8	33
Ende	0	5	10	15	–	–

Als Approximation z für das Mimimum wird am Ende ausgegeben:

$$z = \frac{a+b}{2} = \frac{15}{2} = 7.5$$

Aufgabe 9.
Betrachten Sie die Funktion

$$f:\quad]-\infty,1[\times\mathbb{R} \quad\longrightarrow\quad \mathbb{R}$$

mit

$$f(x,y) \quad:=\quad e^{y\ln(1-x)}.$$

und Funktionen $g_1,g_3,g_4 :]-\infty,1[\longrightarrow\mathbb{R}$ bzw. $g_2:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} g_1(t) &:= f(t,0),\\ g_2(t) &:= f(0,t),\\ g_3(t) &:= f(t,\ln(1-t)) \quad \text{bzw.}\\ g_4(t) &:= -f(t,-\ln(1-t)) \end{aligned}$$

1 Punkt (a) Zeigen oder widerlegen Sie: g_1 ist strikt unimodal.

Lösungsvorschlag:

Die Behauptung ist falsch.

Es gilt $g_1(t)=e^{0\cdot\ln(1-t)}=1$. Als konstante Funktion ist g_1 nicht strikt unimodal.

1 Punkt (b) Zeigen oder widerlegen Sie: g_2 ist strikt unimodal.

Lösungsvorschlag:

Die Behauptung ist falsch.

Es gilt $g_2(t)=e^{t\cdot\ln(1-0)}=e^{t\cdot 0}=1$. Als konstante Funktion ist g_2 nicht strikt unimodal.

2 Punkte (c) Zeigen Sie: Die Funktionen g_3 und g_4 haben bei $t=0$ ein striktes lokales Minimum.

Lösungsvorschlag:

Es gilt

$$\begin{aligned} g_3(t) &= e^{(\ln(1-t))^2},\\ g_4(t) &= -e^{-(\ln(1-t))^2}=-\frac{1}{g_3(t)}. \end{aligned}$$

Wir berechnen die Ableitungen:

$$\begin{aligned} g_3'(t) &= -\frac{2\ln(1-t)}{1-t}e^{(\ln(1-t))^2},\\ g_4'(t) &= -\frac{2\ln(1-t)}{1-t}e^{-(\ln(1-t))^2}. \end{aligned}$$

Da die Exponentialfunktionsfaktoren jeweils echt positiv sind, gilt unter der Voraussetzung von $t<1$

$$\begin{aligned} g_3'(t)>0 \Longleftrightarrow g_4'(t)>0 &\quad\Longleftrightarrow\quad \ln(1-t)<0 \Longleftrightarrow t>0,\\ g_3'(t)=0 \Longleftrightarrow g_4'(t)=0 &\quad\Longleftrightarrow\quad \ln(1-t)=0 \Longleftrightarrow t=0,\\ g_3'(t)<0 \Longleftrightarrow g_4'(t)<0 &\quad\Longleftrightarrow\quad \ln(1-t)>0 \Longleftrightarrow t<0. \end{aligned}$$

Somit sind g_3 und g_4 im Intervall $]-\infty,0]$ streng monoton fallend und im Intervall $[0,1[$ streng monoton wachsend. Also hat jede der beiden Funktionen bei $t=0$ ein striktes lokales (sogar globales) Minimum.

4 Punkte (d) Bestimmen Sie die Menge aller lokalen Minima von der (ursprünglichen) Funktion f.

Lösungsvorschlag:

Wir bestimmen zunächst den Gradienten von f.

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{-y}{1-x}e^{y\ln(1-x)}, \ln(1-x)e^{y\ln(1-x)}\right).$$

Da $e^{y\ln(1-x)} > 0$ ist, gilt

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Longleftrightarrow \left(\frac{-y}{1-x}, \ln(1-x)\right) = (0,0) \Longleftrightarrow (y,x) = (0,0).$$

Somit hat f höchstens ein lokales Minimum, nämlich bei $(x,y) = (0,0)$.

Nach (c) hat aber die Funktion $h := -g_4$ mit

$$h(t) = f(t, -\ln(1-t))$$

bei $t_0 = 0$ ein striktes lokales Maximum. Somit kann f für $t_0 = 0$ an der Stelle

$$(t_0, -\ln(1-t_0)) = (0, -\ln(1-0)) = (0,0)$$

kein lokales Minimum besitzen. Also gilt für die Menge $M_{\text{lok}}(f)$ der lokalen Minima von f

$$M_{\text{lok}}(f) = \emptyset.$$

Bemerkung: Da nach (c) g_3 bei $t_0 = 0$ ein striktes lokales Minimum besitzt und

$$(t_0, \ln(1-t_0)) = (0, \ln(1-0)) = (0,0)$$

gilt, können wir sogar weiter schlussfolgern, dass an der Stelle $(0,0)$ ein Sattelpunkt von f vorliegt.

Aufgabe 10.

3 Punkte (a) Zeigen Sie: Ist S eine konvexe Menge und $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, so ist jedes strikt lokale Minimum auch strikt globales Minimum der Funktion.

Lösungsvorschlag:

Sei x^* strikt lokales Minimum von f. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $x \in S \cap U_\varepsilon(x^*)$ mit $x \neq x^*$ gilt $f(x) > f(x^*)$. Angenommen, es gäbe ein $\tilde{x} \in S \setminus \{x^*\}$ mit

$$f(\tilde{x}) \leq f(x^*). \tag{$*$}$$

Da S konvex ist läge dann auch $z := \lambda \tilde{x} + (1-\lambda)x^*$ für genügend kleines $\lambda \in (0,1)$ in $S \cap U_\varepsilon(x^*)$. Da auch f konvex ist folgt dann

$$f(z) = f(\lambda \tilde{x} + (1-\lambda)x^*) \leq \lambda f(\tilde{x}) + (1-\lambda) f(x^*) = \lambda(f(\tilde{x}) - f(x^*)) + f(x^*) \overset{(*)}{\leq} f(x^*),$$

was der strikten lokalen Optimalität von x^* widerspricht.

1 Punkt (b) Zeigen oder widerlegen Sie:
Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

ist konvex.

Lösungsvorschlag:

Wir bestimmen zunächst den Gradienten und damit die Hessematrix von f:

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x, & 2y, & 2z \end{pmatrix}, \qquad \nabla^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Diese ist offensichtlich positiv definit, denn es gilt für $x,y,z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\begin{pmatrix} x, & y, & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 > 0.$$

Damit ist f konvex.

6 Punkte (c) Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lccccccc} \min & x^2 & + & y^2 & + & z^2 & & \\ \text{unter} & x & + & y & + & z & = & 1. \end{array}$$

Ist die gefundene Lösung auch eine globale Lösung?

1. Lösungsmöglichkeit:

Wir stellen die Nebenbedingung nach z um und erhalten durch Substitution die neue Zielfunktion

$$g(x,y) = x^2 + y^2 + (1-x-y)^2.$$

Die notwendige Bedingung liefert

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-2(1-x-y) \\ 2y-2(1-x-y) \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 4x+2y-2 \\ 2x+4y-2 \end{pmatrix}^\top \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}^\top,$$

also $x^* = y^* = \frac{1}{3}$.
Für die hinreichende Bedingung betrachten wir die Hessematrix

$$\nabla^2 g(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

welche positiv definit ist, denn es gilt für $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x, & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 4x^2 + 4xy + 4y^2 \\ &= 2(x^2 + 2xy + y^2) + 2x^2 + 2y^2 \\ &= 2(x+y)^2 + 2x^2 + 2y^2 > 0. \end{aligned}$$

Damit ist die hinreichende Bedingung im Punkt $(x^*, y^*)^\top$ erfüllt und Prop. 6.4.7 liefert, dass g dort ein striktes lokales Minimum annimmt.
Rücksubstitution liefert ein striktes lokales Minimum in $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})^\top$ von f.
Da f, wie in (b) gezeigt wurde, konvex ist, ist dieses Minimum nach Aufgabenteil (a) auch ein globales Minimum.

2. Lösungsmöglichkeit:

Mit $h(x,y,z) := x+y+z-1$ und $\nabla h(x,y,z) = (1,1,1)$ und dem in Aufgabenteil (b) bestimmten Gradienten von f lauten die KKT-Bedingungen für $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) - \lambda \nabla h(x,y,z) &= 0 \\ h(x,y,z) &= 0, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} &2x - \lambda = 2y - \lambda = 2z - \lambda = x+y+z-1 = 0 \\ \Rightarrow &x = y = z = \frac{1}{2}\lambda \Rightarrow \frac{3}{2}\lambda - (x+y+z) = 0 \\ \Rightarrow &\frac{3}{2}\lambda - 1 = 0, \end{aligned}$$

womit $\lambda^* = \frac{2}{3}$ und $x^* = y^* = z^* = \frac{1}{3}$ folgt.
Wie in Aufgabenteil (b) gezeigt wurde, ist die Hessematrix auf ganz $\mathbb{R}^3$ positiv definit, womit aus Satz 6.6.5 folgt, dass in $(x^*, y^*, z^*)^\top$ ein striktes lokales Minimum vorliegt.
Da f, wie in (b) gezeigt wurde, konvex ist, ist dieses Minimum nach Aufgabenteil (a) auch ein globales Minimum.

Aufgabe 11.

Die Firma *FutureFly* stellt solarbetriebene Flugrucksäcke her. Diese veganen Flugrucksäcke sind etwas für den umweltbewussten Menschen von morgen, der gern flexibel und selbstbestimmt bei schönem Wetter unterwegs ist. Dabei gibt es zwei Sorten, *AeroBigPac* und *AeroSmallPac*, und zwei Fabrikanten, wobei der erste für das Rucksacksystem und der zweite für die solarbetriebene Flugfunktion zuständig ist.

Der erste Fabrikant benötigt für einen AeroBigPac 5 Mann-Stunden und für einen AeroSmallPac 2 Mann-Stunden, wohingegen der zweite Fabrikant für jeden der beiden 3 Mann-Stunden braucht. Die Kapazität des ersten Fabrikanten liegt bei maximal 180 Mann-Stunden pro Woche und die des zweiten bei 135 Mann-Stunden pro Woche.

Weiterhin ist bekannt, dass FutureFly an einem AeroBigPac 3000 GE und an einem AeroSmallPac 2000 GE verdient.

Wieviele AeroBigpacs und wieviele AeroSmallPacs sollte FutureFly herstellen um den Gewinn zu maximieren?

4 Punkte (a) Modellieren Sie das Problem als LP und

Lösungsvorschlag:

Bezeichnen wir mit

x die Anzahl der zu produzierenden AeroBigPacs und mit

y die Anzahl der zu produzierenden AeroSmallPacs,

erhalten wir als Zielfunktion

$$\max F(x,y) = 3000x + 2000y.$$

Als Nebenbedingungen erhalten wir die Arbeitsstundenbedingungen für den ersten Fabrikanten

$$5x + 2y \leq 180 \tag{1}$$

und für den zweiten

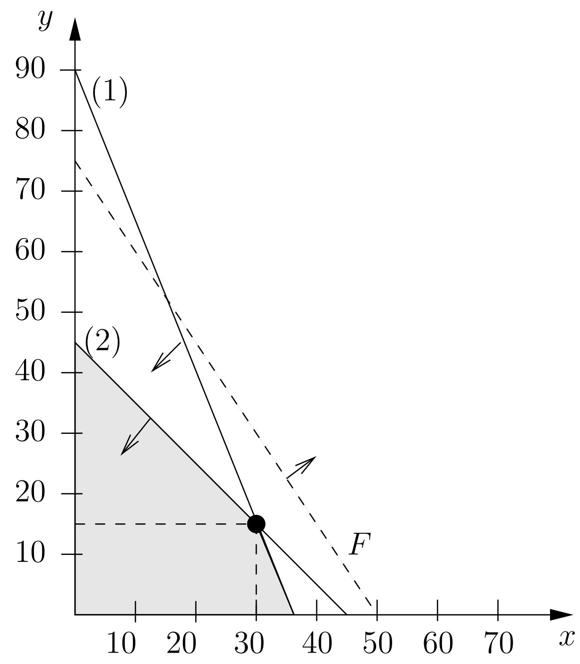
$$3x + 3y \leq 135, \tag{2}$$

wobei $x, y \in \mathbb{N}$ gelten sollte.

5 Punkte (b) bestimmen Sie die Lösung mit einer Methode Ihrer Wahl.

1. Lösungsmöglichkeit: graphisch

Die Optimallösung kann anhand folgender Abbildung abgelesen (oder durch Gleichsetzen der beiden Funktionsgleichungen ermittelt) werden und liegt bei $(x^*, y^*) = (30, 15)$. Sie erfüllt die geforderte Ganzzahligkeit.



2. Lösungsmöglichkeit: Simplex

Wir führen zwei Schlupfvariablen ein und erhalten folgendes Starttableau:

$$\begin{array}{cccc|c} 3000 & 2000 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \boxed{5} & 2 & 1 & 0 & 180 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 135 \end{array}$$

Wir wählen nach Bland‘s rule die erste Spalte als Pivotspalte und der Minimalquotiententest liefert das oben markierte Pivotelement.
Pivotieren liefert:

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 800 & -600 & 0 & -108000 \\ \hline 1 & 2/5 & 1/5 & 0 & 36 \\ 0 & \boxed{9/5} & -3/5 & 1 & 27 \end{array}$$

Nach erneutem Pivotieren erhalten wir:

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -\frac{1000}{3} & -\frac{4000}{9} & -120000 \\ \hline 1 & 0 & 1/3 & -2/9 & 30 \\ 0 & 1 & -1/3 & 5/9 & 15 \end{array}$$

Dieses Tableau ist final, da alle reduzierten Kosten nichtpositiv sind. Die Optimallösung lautet $(x^*, y^*) = (30, 15)$.

Aufgabe 12.

4 Punkte Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \max & -8x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & & \\ \text{unter} & -2x_1 & - & 2x_2 & + & 8x_3 & \geq & -8 \\ & & - & 3x_2 & + & 5x_3 & \leq & 13 \\ & 3x_1 & + & & - & x_3 & \leq & 7 \\ & & & & & x_1, \dots, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

mit einer Methode Ihrer Wahl.

Lösungsvorschlag:

Zunächst transformieren wir die Ungleichungen in Gleichungen, indem wir die Schlupfvariablen $x_4, x_5, x_6 \geq 0$ einführen:

$$\begin{array}{lrcrcrcccccl}
\max & -8x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & & & & & & \\
\text{unter} & -2x_1 & - & 2x_2 & + & 8x_3 & -x_4 & & & = & -8 \\
& & - & 3x_2 & + & 5x_3 & & +x_5 & & = & 13 \\
& 3x_1 & + & & - & x_3 & & & +x_6 & = & 7 \\
& & & & & & & & x_1,\dots,x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Nun müssen wir noch die erste Nebenbedingung mit -1 multiplizieren und erhalten als Starttableau:

$$\begin{array}{cccccc|c}
-8 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
2 & \boxed{2} & -8 & 1 & 0 & 0 & 8 \\
0 & -3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 13 \\
3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 7
\end{array}$$

Wir wählen nach Bland's rule die zweite Spalte und der Minimalquotiententest liefert die erste Zeile und somit das oben markierte Pivotelement. Pivotieren liefert

$$\begin{array}{cccccc|c}
-14 & 0 & 28 & -3 & 0 & 0 & -24 \\
\hline
1 & 1 & -4 & 1/2 & 0 & 0 & 4 \\
3 & 0 & -7 & 3/2 & 1 & 0 & 25 \\
3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 7
\end{array}$$

Jetzt können wir nur die dritte Spalte auswählen, aber keine Zeile, da dort alle Einträge nichtpositiv sind. Das Problem ist somit auf dem Strahl $(0,4,0)+\lambda(0,4,1)$, für $\lambda \geq 0$ unbeschränkt (vgl. Beweis von Lemma 8.3.10).