Aufgabe 1.

5 Punkte Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$6\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = 2n(n+1)(n+2).$$

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen die Behauptung per vollständiger Induktion über n.

Für $n = 0$ gilt

$$6\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = 6\sum_{k=0}^{0} k(k+1) = 6 \cdot 0 \cdot (0+1) = 0 = 2 \cdot 0 \cdot (0+1) \cdot (0+2) = 2n(n+1)(n+2).$$

Damit ist die Verankerung erbracht.

Sei nun $n > 0$ und gelte die Behauptung für $n-1$, d.h. es gilt

$$6\sum_{k=0}^{n-1} k(k+1) = 2(n-1)n(n+1). \tag{IV}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} 6\sum_{k=0}^{n} k(k+1) &= 6n(n+1) + 6\sum_{k=0}^{n-1} k(k+1) \\ &\overset{(IV)}{=} 6n(n+1) + 2(n-1)n(n+1) \\ &= 2n(n+1)[3 + (n-1)] \\ &= 2n(n+1)(n+2), \end{aligned}$$

also gilt die Behauptung auch für n.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2.

3 Punkte Sie würfeln mit einem fairen, 6-seitigen Würfel und werfen eine faire Münze. Sei A die angezeigte Augenzahl des Würfels. Ihr Gewinn beträgt $A+2$, wenn die Münze Kopf zeigt und $A-1$, wenn die Münze Zahl zeigt.

Was ist Ihr erwarteter Gewinn im Mittel?

Lösungsvorschlag:

Sei X die Zufallsvariable, die die Augenzahl beim Würfeln beschreibt.

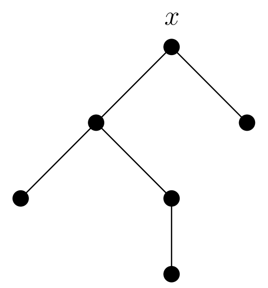
Sei $Y = \begin{cases} 2, & \text{falls die Münze Kopf zeigt;} \\ -1, & \text{falls die Münze Zahl zeigt.} \end{cases}$

Der gesuchte Erwartungswert ist dann

$$E = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \sum_{k=1}^{6} \frac{k}{6} + \left(\frac{2}{2} + \frac{-1}{2}\right) = \frac{21}{6} + \frac{1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4.$$

Aufgabe 3.

Betrachten Sie den im Folgenden abgebildeten Baum T:



T

1 Punkt (a) Bestimmen Sie den Code des gepflanzten Baumes (T, x, ρ) mit Wurzel x aus der Abbildung und der Pflanzung ρ, bei der die Blattreihenfolge wie in der Abbildung oben von links nach rechts gegeben ist.

Lösungsvorschlag:

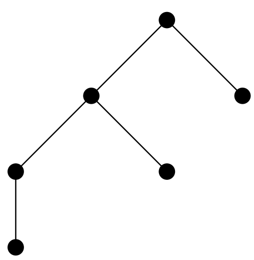
Der Code des gepflanzten Baumes (T, x, ρ) lautet

$$((()(()))()).$$

1 Punkt (b) Bestimmen Sie den Code des Wurzelbaumes (T, x) mit Wurzel x aus der Abbildung.

Lösungsvorschlag:

Der Code des Wurzelbaumes (T, x) ergibt sich durch lexikografisches Sortieren des Codes aus (a) als Code des im Folgenden abgebildeten gepflanzten Baumes.



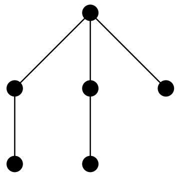
Der Code lautet also

$$(((())())()).$$

2 Punkte (c) Bestimmen Sie den Code des Baumes T.

Lösungsvorschlag:

Das Zentrum des Baumes T ist der linke Kindknoten von x. Dieser ist die kanonische Wurzel von T. Bezüglich dieser Wurzel kommen die beiden Äste der Länge 2 in der lexikografischen Ordnung vor dem Ast der Länge 1. Der Code des Baumes T ist also der Code des im Folgenden abgebildeten gepflanzten Baumes



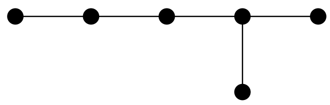
und lautet also

$$(((\,))((\,))(\,)).$$

7 Punkte (d) Zeigen Sie: Es gibt zwei untereinander nicht isomorphe und zu T nicht isomorphe Graphen G_1 und G_2 mit Valenzsequenz $(3,2,2,1,1,1)$. Beweisen Sie die paarweise Nichtisomorphie der drei Graphen G_1, G_2 und T.

Lösungsvorschlag:

Wenn wir in T einen Knoten vom Grad 2 mit dem Knoten vom Grad 3 vertauschen, erhalten wir folgenden Baum G_1

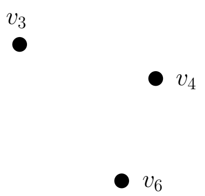


G_1

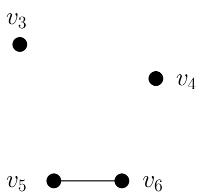
Um G_2 zu finden, nutzen wir das Verfahren von Havel und Hakimi:

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
3	2	2	1	1	1
	1	1	0	1	1
	v_2	v_3	v_6	v_5	v_4
	1	1	1	1	0
		0	1	1	0
		v_5	v_6	v_3	v_4
		1	1	0	0
			0	0	0

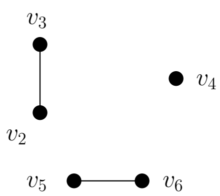
Wenden wir die Schritte rückwärts an, so können wir einen Graphen mit Valenzsequenz $(3,2,2,1,1,1)$ konstruieren:



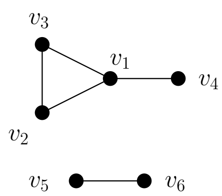
Endgraph



Schritt 3



Schritt 2



Schritt 1

Den Graphen, der nach Schritt 1 entsteht, nennen wir G_2.

Wir zeigen nun, dass G_1, G_2 und T paarweise nicht isomorph sind.

Da T und G_1 keine Kreise enthalten, der Graph G_2 aber den Kreis, der von der Knotenmenge $\{v_1, v_2, v_3\}$ induziert wird, enthält, kann G_2 nicht isomorph zu einem der anderen beiden Graphen sein.

Der Baum G_1 hat als Zentrum den linken Nachbarn des Knoten vom Grad 3. Wir bestimmen den Code von G_1 somit als

$$(((()())(()))).$$

Dieser Code ist verschieden von dem in (c) bestimmten Code des Baumes T. Somit können auch die Bäume G_1 und T nicht isomorph sein.

Alternativ könnte man für die Nichtisomorphie von G_1 und T auch wie folgt argumentieren: Der Knoten vom Grad 3 ist in G_1 adjazent zu zwei Blättern, in T jedoch nur zu einem. Deswegen sind G_1 und T nicht isomorph.

3 Punkte (e) Zeigen Sie: Es gibt keine drei untereinander nicht isomorphe und zu T nicht isomorphe Graphen mit Valenzsequenz $(3,2,2,1,1,1)$.

Lösungsvorschlag:

Wir bemerken zunächst, dass der Knoten vom Grad 3 zu mindestens einem Knoten vom Grad 2 benachbart sein muss: Wäre dieser zu allen drei Blättern benachbart, so hätten die beiden Knoten vom Grad 2 in einem einfachen Graphen nicht ausreichend viele Nachbarn, da sie dann nur untereinander benachbart sein könnten.

Nun betrachten wir zwei Fälle:

Fall 1: Der Knoten vom Grad 3 ist zu genau einem Knoten z vom Grad 2 benachbart.

Dann sind die beiden anderen Nachbarn vom Knoten vom Grad 3 Blätter. Der Knoten z kann nicht mit einem Blatt verbunden sein, sonst ständen für den zweiten Knoten vom Grad 2 keine Nachbarn mehr zur Verfügung. Also ist er mit dem zweiten Knoten vom Grad 2 verbunden, und dieser wiederum mit dem letzten Blatt, und es ergibt sich ein zu G_1 isomorpher Baum.

Fall 2: Der Knoten vom Grad 3 ist zu beiden Knoten vom Grad 2 benachbart.

Der dritte Nachbar vom Knoten vom Grad 3 ist dann ein Blatt.

Falls die beiden Knoten vom Grad 2 benachbart sind, so müssen die beiden verbleibenden Blätter benachbart sein, da an die Knoten vom Grad 2 und 3 nichts mehr gehägt werden kann. In diesem Fall erhält man also eine zu G_2 isomorphen Graphen.

Falls die beiden Knoten vom Grad 2 nicht benachbart sind, so müssen sie jeweils ein Blatt als Nachbarn haben, d.h. es ergibt sich ein zu T isomorpher Baum.

Somit haben wir insgesamt gezeigt, dass die Anzahl der Isomorphieklassen von Graphen mit Valenzsequenz $(3,2,2,1,1,1)$ gleich drei ist, was äquivalent zur Behauptung ist.

Aufgabe 4.

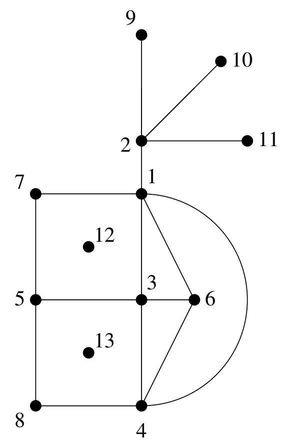
5 Punkte Zeigen Sie: Zu jedem Baum T_1 existiert ein Baum T_2, so dass T_2 ein perfektes Matching besitzt und T_1 ein Teilgraph von T_2 ist.

Lösungsvorschlag:

Wir gehen von T_1 aus und einem Matching M von T_1 (z.B. dem leeren Matching). Um den Baum T_2 zu bilden, fügen wir zu jedem ungematchten Knoten v von T_1 einen Knoten w_v und die Kante vw_v hinzu. Fügen wir zu dem Matching M alle solchen Kanten vw_v hinzu, so erhalten wir ein perfektes Matching von T_2. Da T_1 offensichtlich Teilbaum von T_2 ist, erfüllt T_2 die geforderte Bedingung.

Aufgabe 5.

Betrachten Sie den im Folgenden abgebildeten Graphen G:

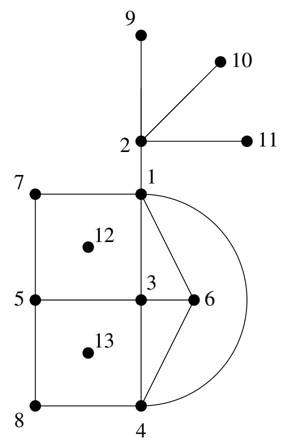


G

2 Punkte (a) Führen Sie eine Breitensuche durch, wobei in den Nachbarschaften die Knoten gemäß der obigen Nummerierung in die Queue aufgenommen werden sollen (kleinste zuerst). Geben Sie den Breitensuchbaum und die Komponenten von G an.

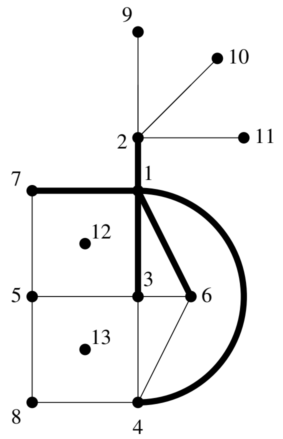
Lösungsvorschlag:

Wir listen die markantesten Schritte der Breitensuche auf. Dabei bezeichne Q die aktuelle Queue.



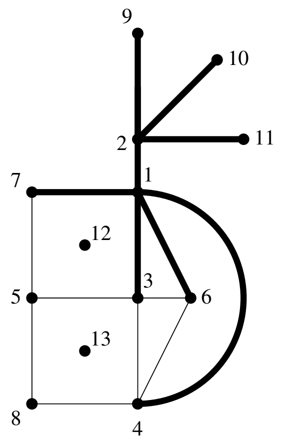
$Q = \{1\}$

Schritt 1



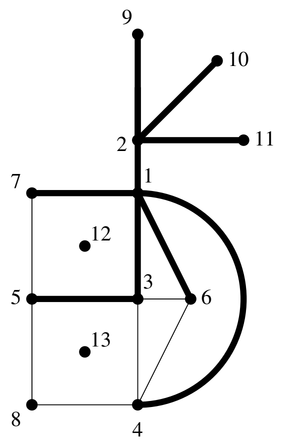
$Q = \{2, 3, 4, 6, 7\}$

Schritt 2



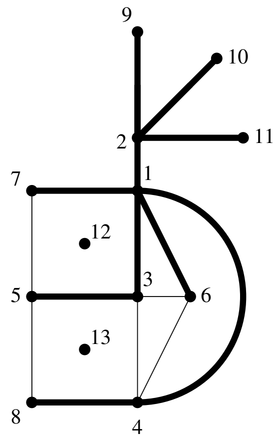
$Q = \{3, 4, 6, 7, 9, 10, 11\}$

Schritt 3



$Q = \{4, 6, 7, 9, 10, 11, 5\}$

Schritt 4



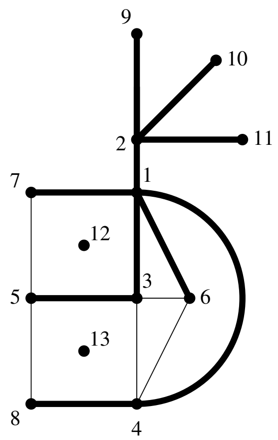
$Q = \{6,7,9,10,11,5,8\}$

Schritt 5

Danach werden alle Knoten der Reihe nach der Queue entnommen, d.h. die erste Komponente ist bestimmt.

Am Schluss werden Knoten 12 bzw. 13 jeweils in die Queue aufgenommen und direkt wieder entnommen, was uns zwei weitere Komponenten liefert.

Die Breitensuche findet also den folgenden Breitensuchbaum, der aus drei Bäumen besteht, die in den Knoten 1, 12 bzw. 13 gewurzelt sind:



Da der Breitensuchbaum ein Wald ist, der aus drei Bäumen besteht, sind die Komponenten von G die Knotenmengen dieser Bäume, d.h. die Komponenten sind

$$\begin{aligned} C_1 &= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}, \\ C_2 &= \{12\}, \\ C_2 &= \{13\}. \end{aligned}$$

2 Punkte (b) Zeigen Sie, dass G einen 2-zusammenhängenden Untergraph H mit 7 Knoten besitzt. Geben Sie eine Ohrenzerlegung von H an.

Lösungsvorschlag:

Wir behaupten, dass die Knotenmenge $\{1,3,4,5,6,7,8\}$ einen 2-zusammenhängenden Untergraph H mit 7 Knoten induziert. Zum Beweis geben wir eine Ohrenzerlegung $(C_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$ an, wobei C_0 ein Kreis ist und P_i Pfade sind für $1 \leq i \leq 4$:

$$\begin{aligned} C_0 &= 1,3,5,7,1; \\ P_1 &= 3,4,8,5; \\ P_2 &= 1,6,4; \\ P_3 &= 3,6; \\ P_4 &= 1,4. \end{aligned}$$

3 Punkte (c) Sei A die Adjazenzmatrix von G bezüglich der durch die Knotennummern in der Abbildung definierten Knotensortierung, $\mathbf{1} = (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)^\top \in \mathbb{R}^{13}$ der Vektor aus lauter Einsen und $b \in \mathbb{R}^{13}$ der Vektor der Einträge der (geordneten) Valenzsequenz von G. Zeigen Sie:

$$A\mathbf{1} = b.$$

Lösungsvorschlag:

Es gilt für den Vektor $s = (d_G(i))_{i=1,\ldots,14}$ der Einträge der Valenzsequenz von G bezüglich der Knotennummern in der Abbildung der Aufgabenstellung

$$s = (5,4,4,4,3,3,2,2,1,1,1,0,0)^\top.$$

Wir stellen fest, dass s geordnet ist. Also gilt $s = b$.

Ferner stehen in Zeile i der Adjazenzmatrix genau so viele Einsen wie Knoten i an Nachbarn hat, also $d_G(i)$ viele. Somit folgt

$$A\mathbf{1} = s = b,$$

was zu zeigen war.

1 Punkt (d) Zeigen oder widerlegen Sie:

Der Graph G enthält einen Weg P_6 der Länge 5 als induzierten Teilgraphen.

Lösungsvorschlag:

Die Behauptung ist wahr. Die 9 möglichen induzierten Wege der Länge 5 sind im Folgenden aufgelistet:

$$\begin{array}{ccc} 9,2,1,4,8,5 & 9,2,1,3,5,8 & 9,2,1,7,5,8 \\ 10,2,1,4,8,5 & 10,2,1,3,5,8 & 10,2,1,7,5,8 \\ 11,2,1,4,8,5 & 11,2,1,3,5,8 & 11,2,1,7,5,8 \end{array}$$

Jeder einzelne davon zeigt die Behauptung.

2 Punkte (e) Zeigen oder widerlegen Sie:

Der Graph G enthält einen Kreis der Länge $k \geq 6$ als induzierten Teilgraphen.

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen, dass die Behauptung falsch ist. Wir benutzen die Methode des Beweises per Widerspruch.

Angenommen, der Graph G enthält einen induzierten Kreis C der Länge 6.

Da jeder Kreis des Graphen in dem Graphen H aus (b) mit den 7 Knoten 1,3,4,5,6,7,8 enthalten ist, muss C ein induzierter Untergraph von H sein, d.h. aus H dadurch entstehen, dass man einen Knoten von H löscht.

Löscht man 1, 4 oder 5 in H, so entsteht ein Graph mit mindestens einem Blatt, also inbesondere kein Kreis.

Löscht man 3 oder 6 in H, so entsteht ein C_6 mit einer Sehne, also inbesondere kein C_6.

Löscht man 7 oder 8 in H, so entsteht ein Graph mit 9 Kanten, also inbesondere kein Kreis C_6.

Somit ist die Annahme falsch.

1 Punkt (f) Zeigen oder widerlegen Sie:

Für jeden induzierten Teilgraphen von G, der isomorph zu einem vollständigen Graphen K_n ist, gilt $n \leq 3$.

Lösungsvorschlag:

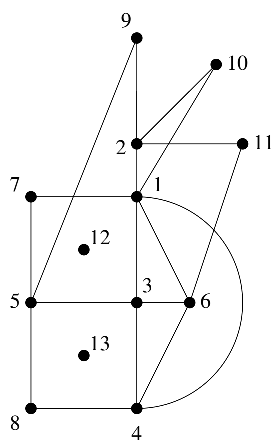
Wir zeigen, dass die Behauptung falsch ist.

Gegenbeispiel ist der von den Knoten 1,3,4,6 induzierte Teilgraph, der isomorph zum vollständige Graphen K_4 ist.

2 Punkte (g) Sei G' der Graph, der entsteht, wenn man in G die Kanten $\{5,9\}$, $\{1,10\}$ und $\{6,11\}$ hinzufügt und die Knoten 12 und 13 löscht. Zeigen Sie, dass der neue Graph G' eulersch ist und geben Sie eine Eulertour von G' an.

Lösungsvorschlag:

Der neue Graph G' sieht wie folgt aus:



G

Der neue Graph G' ist nach (a) zusammenhängend. Seine Valenzsequenz bezüglich der Knotennummerierung aus der Aufgabenstellung ist

$$(6,4,4,4,4,4,2,2,2,2,2,2),$$

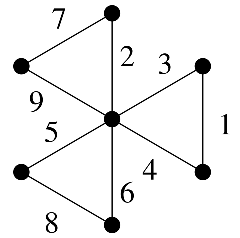
d.h. alle Knotengrade sind gerade. Damit ist G' eulersch.

Eine Eulertour von G' findet man nach dem Algorithmus aus dem Kurstext als

$$1,2,9,5,3,1,4,3,6,1,7,5,8,4,6,11,2,10,1.$$

Aufgabe 6.

Betrachten Sie den im Folgenden abgebildeten, mit Kantengewichten versehenen Graphen G_0.



G_0

3 Punkte (a) Bestimmen Sie die Anzahl der aufspannenden Bäume von G_0.

Lösungsvorschlag:

Nach der Cayley-Formel ist die Anzahl der aufspannenden Bäume vom jedem der drei Dreiecke von G_0 gleich $3^{3-2} = 3$. Da die drei Dreiecke nur über einen Schnittknoten zusammengehalten werden, sind ist die Wahl der aufspannenden Teilbäume in ihnen jeweils unabhängig voneinder, d.h. die Möglichkeiten multiplizieren sich und wir erhalten

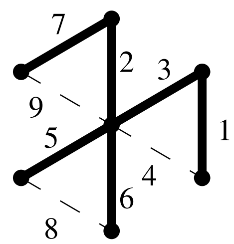
$$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

als Anzahl der aufspannenden Bäume von G_0.

2 Punkte (b) Bestimmen Sie einen minimalen aufspannenden Baum von G_0 bezüglich der angegebenen Kantengewichte.

Lösungsvorschlag:

Mit dem Verfahren von Kruskal bestimmen wir den minimalen aufspannenden Baum von G_0 wie folgt:



Aufgabe 7.

3 Punkte Betrachten Sie folgenden Ausdruck

$$h(x) := \sqrt{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}} - \sqrt{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}}$$

für sehr großes x.

Geben Sie eine numerisch stabile Auswertungsvorschrift für $h(x)$ an, die das Phänomen der Auslöschung vermeidet.

Lösungsvorschlag:

Wir erweitern wie folgt

$$\begin{aligned} h(x) &= \left(\sqrt{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}} - \sqrt{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}}\right) \frac{\sqrt{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}} + \sqrt{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}}}{\sqrt{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}} + \sqrt{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right) - \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)}{\sqrt{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}} + \sqrt{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}}} \\ &= \frac{\frac{2}{\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}} + \sqrt{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}}}. \end{aligned}$$

Daraus gewinnen wir die numerisch stabile Auswertungsvorschrift

```
h(x)=
(2/(sqrt(sqrt(x))))/
(sqrt(sqrt(x)+(1/sqrt(sqrt(x))))+sqrt(sqrt(x)-(1/sqrt(sqrt(x))))),
```

da der Nenner für sehr großes x ungefähr $2\sqrt[4]{x}$ ist.

Aufgabe 8.

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4 Punkte (a) Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung von A.

Lösungsvorschlag:

Im ersten Schritt vertauschen wir die erste und zweite Zeile. Danach bestimmen wir die L und U-Matrix einer LU-Zerlegung wie folgt.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -7 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -7 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Somit lautet eine LU-Zerlegung von A

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{U}$$

4 Punkte (b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

Lösungsvorschlag:

$Ax = b$ ist nach (a) äquivalent zu $LUx = Pb$. Wir lösen dies, indem wir zunächst $Ly = Pb$ nach y lösen und dann $Ux = y$. Wir benutzen die LU-Zerlegung aus dem ersten Lösungsvorschlag von (a).

1. Löse $Ly = Pb$, d.h.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir lesen als Lösung ab

$$(y_1, y_2, y_3) = (0, -1, 3).$$

2. Löse $Ux = y$, d.h.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Wir lesen als Lösung ab

$$(x_1, x_2, x_3) = (-4, 2, 1).$$

1 Punkt (c) Berechnen Sie $\|A\|_1$.

Lösungsvorschlag:

Es gilt für die Spaltensummennorm $\|A\|_1$ von A:

$$\|A\|_1 = \max\{0+2+4, 3+1+5, |-7|+6+8\} = \max\{6, 9, 21\} = 21.$$

Aufgabe 9.

Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x(x-1)(x-2), & \text{falls } x \geq 0; \\ -x(x+1)(x+2), & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

6 Punkte (a) Bestimmen Sie sämtliche lokale Mimima von f.

Lösungsvorschlag:

Wegen $\lim_{x\to 0_-} f(x) = 0 = f(0)$ ist f stetig.

Seien $f_+ := f_{|]0,\infty[}$ und $f_- := f_{|]-\infty,0[}$, d.h.

$$\begin{aligned} f_+(x) &= x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x, \\ f_-(x) &= -x(x+1)(x+2) = -x^3 - 3x^2 - 2x. \end{aligned}$$

Dann folgen als erste Ableitungen

$$\begin{aligned} f_+'(x) &= = 3x^2 - 6x + 2, \\ f_-'(x) &= -3x^2 - 6x - 2, \end{aligned}$$

und als zweite Ableitungen

$$\begin{aligned} f_+''(x) &= 6x - 6, \\ f_-''(x) &= -6x - 6. \end{aligned}$$

Da $\lim_{x\to 0_+} f_+'(x) = 2 > 0$ und $\lim_{x\to 0_-} f_-'(x) = -2 < 0$ und f stetig in 0 ist, liegt an der Stelle 0 ein striktes lokales Minimum von f.

Alle weiteren Minima sind stationäre Punkte von f_+ und f_-. Wir gewinnen die Kandidaten, indem wir die Ableitungen von f_+ bzw. f_- gleich 0 setzen.

Es gilt

$$\begin{aligned} f_+'(x) = 0 &\iff x^2 - 2x + \frac{2}{3} = 0 \\ &\iff x = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \quad (> 0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_-'(x) = 0 &\iff x^2 + 2x + \frac{2}{3} = 0 \\ &\iff x = -1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \quad (< 0). \end{aligned}$$

Somit haben wir die vier Kandidaten $\pm 1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$ gefunden.

Prüfen wir die Bedingungen zweiter Ordnung nach, so stellen wir fest, dass

$$\begin{aligned} f_+''\left(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}\right) = f_-''\left(-1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right) &= 6\left(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}\right) - 6 = 2\sqrt{3} > 0, \\ f_+''\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right) = f_-''\left(-1 + \sqrt{\frac{1}{3}}\right) &= 6\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right) - 6 = -2\sqrt{3} < 0. \end{aligned}$$

Somit handelt es sich bei den Kandidaten $1 + \sqrt{\frac{1}{3}}$ und $-1 - \sqrt{\frac{1}{3}}$ um strikte lokale Minima und bei den Kandidaten $1 - \sqrt{\frac{1}{3}}$ und $-1 + \sqrt{\frac{1}{3}}$ um strikte lokale Maxima.

Die Menge der lokalen Minima ist also

$$\left\{-1-\sqrt{\frac{1}{3}}, 0, 1+\sqrt{\frac{1}{3}}\right\}.$$

2 Punkte (b) Welche der lokalen Minima sind globale Minima? Begründen Sie Ihre Aussage.

Lösungsvorschlag:

Wir vergleichen die Funktionswerte der drei lokalen Minima:

$$\begin{aligned} f\left(1+\sqrt{\frac{1}{3}}\right) &= \left(1+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\sqrt{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}-1\right) \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}-1\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}, \\ f(0) &= 0, \\ f\left(-1-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) &= -\left(-1-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}+1\right) \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}-1\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Da $f\left(1+\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = f\left(-1-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) < f(0)$ und

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$$

gelten, ist die Menge der globalen Minima nur

$$\left\{-1-\sqrt{\frac{1}{3}}, 1+\sqrt{\frac{1}{3}}\right\}.$$

Aufgabe 10.

9 Punkte Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{llllllll} \min & x^2 & + & y & - & z & & \\ \text{unter} & x^2 & & & + & z & \leq & 3 \\ & x & + & y & + & z & = & 4. \end{array}$$

Lösungsvorschlag:

Wir substituieren $y = 4 - x - z$ und erhalten das äquivalente Problem

$$\begin{array}{lllll} \min & x^2 - x & - & 2z & \\ \text{unter} & x^2 & + & z & \leq 3, \end{array}$$

d.h.

$$\begin{array}{rll} \min & f(x,z) & \\ \text{unter} & g(x,z) & \leq 0 \end{array}$$

mit

$$\begin{aligned} f(x,z) &= x^2 - x - 2z, \\ g(x,z) &= x^2 + z - 3. \end{aligned}$$

Wir bestimmen die Gradienten

$$\begin{aligned} \nabla f(x,z) &= (2x-1,-2), \\ \nabla g(x,z) &= (2x,1), \end{aligned}$$

und die Hessematrizen

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(x,z) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \nabla^2 g(x,z) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da $(2x,1) \neq (0,0)$ gilt, sind alle Punkte reguläre Punkte der Nebenbedingungen.
Daher lauten die notwendigen Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen für die Existenz eines lokalen Minimums an der Stelle $(x,z)^\top$: Es gibt ein $\mu \leq 0$, so dass

$$\begin{aligned} 2x-1 &= \mu \cdot 2x, && (1) \\ -2 &= \mu, && (2) \\ \mu(x^2+z-3) &= 0. && (3) \end{aligned}$$

Setzen wir (2) in (1) ein, so ergibt sich

$$2x - 1 = -4x,$$

woraus $6x = 1$, also $x = \frac{1}{6}$ folgt. Wegen $\mu \neq 0$ folgt aus (3)

$$x^2 + z - 3 = 0.$$

Setzen wir darin unseren x-Wert ein, so ergibt sich

$$\frac{1}{36} + z - 3 = 0,$$

also $z = \frac{107}{36}$.
Wir haben also nur den einen Kandidaten $(x,z) = \left(\frac{1}{6}, \frac{107}{36}\right)$ gefunden.
Da die Ungleichungsnebenbedingung aktiv ist, betrachten wir den Kern der Matrix $\nabla g(x,z) = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$. Dieser ist

$$M = \{r(3,-1)^\top \mid r \in \mathbb{R}\}.$$

Weil

$$r(3,-1)(\underbrace{\nabla^2 f(x,z)-(-2)\nabla^2 g(x,z)}_{=:L})r(3,-1)^\top = r(3,-1)\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} r(3,-1)^\top = 54r^2 > 0$$

im Falle $r \neq 0$ gilt, ist die Matrix L auf M positiv definit, also handelt es sich bei dem Kandidaten um ein striktes lokales Minimum.
Anstatt der Bedingungen 2. Ordnung hätte man auch wie folgt argumentieren können, dass es sich um ein Minimum handelt: Wegen $x^2 \longrightarrow \infty$ für $x \to \pm\infty$ und $z \le 3$ und, da x^2 stärker wächst als $-x$, wächst die Zielfunktion in alle Richtungen (außer in Richtung $(0,1)$) gegen $+\infty$; in Richtung $(0,1)$ ist der Zulässigkeitsbereich aber beschänkt. Somit muss es ein Minimum geben.
Da die Zielfunktion $x^2 - x - 2z$ wegen der aus der Ungleichungsnebenbedingung folgenden Beziehung $z \le 3$ und wegen $x^2 - x \ge \frac{1}{4}$ nach unten beschränkt ist, handelt es sich bei dem Minimum sogar um ein striktes globales Minimum.
Mittels der Rücksubstitution

$$y = 4 - x - z = 4 - \frac{1}{6} - \frac{107}{36} = \frac{31}{36}$$

gewinnen wir das eindeutige lokale Minimum für das Originalproblem als

$$(x,y,z) = \left(\frac{1}{6}, \frac{31}{36}, \frac{107}{36}\right)$$

vom Wert

$$\frac{1+31-107}{36} = -\frac{75}{36} = -\frac{25}{12}.$$

Aufgabe 11.
Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 1$. Die Funktion $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$F(x) = \|x\|,$$

wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige Vektornorm des $\mathbb{R}^n$ bezeichne.

1 Punkt (a) Schreiben Sie die drei Normaxiome (N1), (N2) und (N3) auf.

Lösungsvorschlag:

(N1) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

(N2) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

(N2) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|.$$

3 Punkte (b) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Funktion F ist konvex.

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen, dass F konvex ist. Seien dazu $x,y \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in [0,1]$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rcl} F(\lambda x+(1-\lambda)y) & = & \|\lambda x+(1-\lambda)y\| \\ & \overset{(N3)}{\leq} & \|\lambda x\| + \|(1-\lambda)y\| \\ & \overset{(N2)}{=} & |\lambda|\cdot\|x\| + |1-\lambda|\cdot\|y\| \\ & \overset{\lambda\in[0,1]}{=} & \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| \\ & = & \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y). \end{array}$$

Somit ist F konvex.

3 Punkte (c) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Funktion F ist strikt konvex.

Lösungsvorschlag:

Die Behauptung ist falsch. Seien dazu $x = 2e_1 \in \mathbb{R}^n$, wobei e_1 der erste Einheitsvektor sei (dieser existiert auf Grund der Voraussetzung $n \geq 1$), und $y = 0 \in \mathbb{R}^n$ sowie $\lambda = \frac{1}{2}$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} F(\lambda x+(1-\lambda)y) & = & \|e_1\| \\ & \overset{(N2)}{=} & \frac{1}{2}\lambda\|2e_1\| \\ & \overset{(N1)}{=} & \frac{1}{2}\lambda\|2e_1\| + \frac{1}{2}\|0\| \\ & = & \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y). \end{array}$$

Somit ist F nicht strikt konvex.

Aufgabe 12.

9 Punkte Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & x & + & 2y & & \\ & x & + & y & \leq & 4 \\ & -3x & + & 2y & \leq & 0 \\ & & & y & \geq & 1 \\ & -x & + & y & \geq & 1 \end{array}$$

mit einer Methode Ihrer Wahl.

Lösungsvorschlag:

1. Lösungsmöglichkeit: Addition von Nebenbedingungen

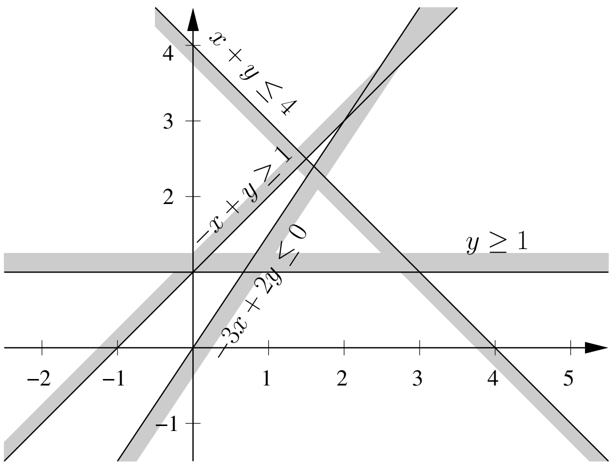
Angenommen, das Problem habe eine zulässige Lösung (x,y).

Subtrahieren wir die vierte Nebenbedingung von der ersten so erhalten wir

$$2x \leq 3,$$

also
$$x \leq \frac{3}{2}. \tag{4}$$
Subtrahieren wir das Doppelte der vierte Nebenbedingung von der zweiten Nebenbedingung so erhalten wir
$$-x \leq -2,$$
also
$$x \geq 2. \tag{5}$$
Da (4) und (5) zusammen auf den Widerspruch
$$2 \leq x \leq \frac{3}{2} < 2$$
führen, hat das Optimierungsproblem keine zulässige Lösung.

2. Lösungsmöglichkeit: grafische Lösung



Der grafischen Lösung kann man entnehmen, dass bereits die drei Ungleichungen verschieden von $y \geq 1$ einen leeren Bereich liefern.