Aufgabe 1.

5 Punkte Sei $x \in]0,1[$. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(1-x)^n \geq 1 - nx.$$

Aufgabe 2.

Auf einer Jubiläumsfeier der FernUni wird folgendes Glücksspiel angeboten. In einer roten Box befinden sich drei Zettel, jeweils einer davon wurde mit „W“, einer mit „ I“ und einer mit „N“ beschriftet. In einer weiteren, blauen Box befinden sich insgesamt sechs Zettel, davon wurden jeweils zwei mit „W“, „I“ und „N“ beschriftet. Sie dürfen sich nun für eine Box entscheiden und aus dieser nacheinander, ohne Zurücklegen drei Zettel ziehen. Sie gewinnen, wenn Sie die Zettel „W I N“ in genau dieser Reihenfolge ziehen.

3 Punkte (a) Für welche Box entscheiden Sie sich?

2 Punkte (b) Ändert sich etwas, wenn man mit Zurücklegen ziehen darf?

(Selbstverständlich erwarten wir von Ihnen in beiden Aufgabenteilen, dass Sie die jeweiligen Gewinnwahrscheinlichkeiten ausrechnen.)

Aufgabe 3.

Wir definieren auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ folgende Relation

$$(p,q) \sim (r,s) :\Leftrightarrow ps = qr.$$

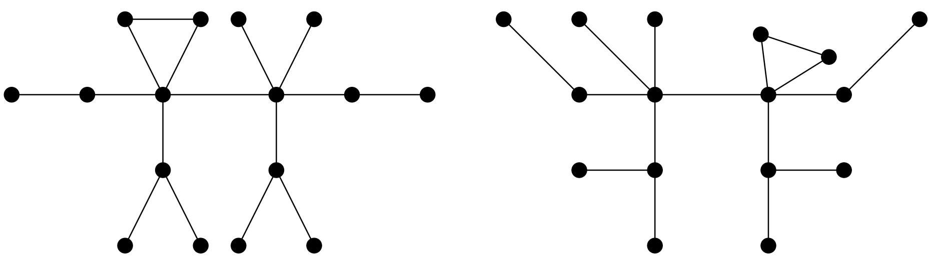
Zeigen Sie:

4 Punkte (a) $\sim$ definiert eine Äquivalenzrelation.

3 Punkte (b) Die Äquivalenzklassen von $\sim$ lassen sich bijektiv auf $\mathbb{Q}$ abbilden.

Aufgabe 4.

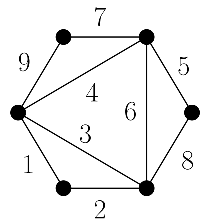
Betrachten Sie die im Folgenden abgebildeten Graphen G_1 und G_2.



G_1 G_2

5 Punkte Zeigen oder widerlegen Sie: G_1 und G_2 sind isomorph.

Aufgabe 5.
Betrachten Sie den folgenden Graphen G mit den angegebenen Kantengewichten.



G

2 Punkte (a) Zeigen oder widerlegen Sie: Der Graph G ist eulersch.
Geben Sie ggf. eine Eulertour an.

1 Punkt (b) Zeigen oder widerlegen Sie: Der Graph G ist 2-zusammenhängend.

1 Punkt (c) Zeigen oder widerlegen Sie: Der Graph G ist 3-zusammenhängend.

2 Punkte (d) Bestimmen Sie die minimale Anzahl m_B von Kanten, die man aus G entfernen muss, damit ein kreisfreier Graph entsteht.
Beweisen Sie die Minimalität Ihrer gefundenen Kantenanzahl.

2 Punkte (e) Bestimmen Sie einen minimalen aufspannenden Baum in G bezüglich der angegebenen Kantengewichte und begründen Sie dessen Minimalität.

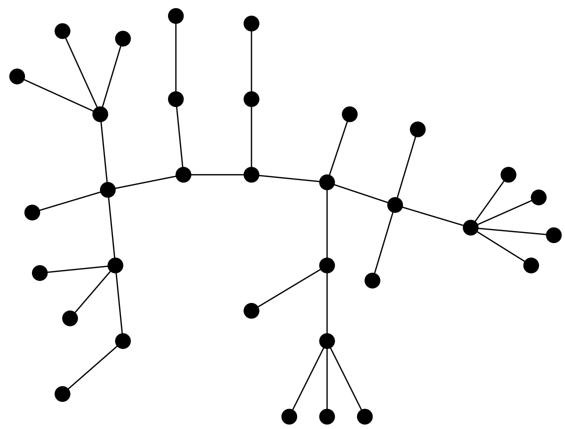
2 Punkte (f) Zeigen oder widerlegen Sie: In G ist jeder Knoten von jedem anderen durch einen Spaziergang der Länge 2 erreichbar.

4 Punkte (g) Ein *Automorphismus* eines Graphen $H = (V(H), E(H))$ ist ein Isomorphismus, der $V(H)$ auf sich selbst abbildet.
Zeigen Sie: Zu dem Graphen G existieren genau 6 Automorphismen.

Aufgabe 6.
Eine *Blattkante* in einem Baum ist eine Kante, bei der einer der Endknoten ein Blatt ist. Ist v ein innerer Knoten eines Baumes, so heißt die Menge aller zu v inzidenten Blattkanten eine *Blattgarbe*.

4 Punkte (a) Sei T ein Baum. Zeigen Sie, dass es ein maximales Matching von T gibt, welches von den Kanten jeder Blattgarbe genau eine Kante enthält (und möglicherweise noch weitere Kanten aus T).

4 Punkte (b) Bestimmen Sie ein maximales Matching von dem unten abgebildenten Graphen T_0 und beweisen Sie dessen Maximalität.



T_0

Aufgabe 7.
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

3 Punkte (a) Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung von A.

5 Punkte (b) Bestimmen Sie die Konditionszahl $\text{cond}_1(A)$ bezüglich der Spaltensummennorm $\|\cdot\|_1$.

3 Punkte (c) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (2,1,0,0)^\top$.

Aufgabe 8.

4 Punkte Sei $f : [0,40] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = |x-4| + |x-8| + 3 \cdot |x-10|.$$

Bestimmen Sie eine Approximation für ein Minimum von f auf dem Intervall $[0,40]$ mittels einer Fibonaccisuche mit 2 Schritten.

Aufgabe 9.
Betrachten Sie die Funktion

$$f : \quad]-\infty,1[\times\mathbb{R} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

mit

$$f(x,y) \quad := \quad e^{y\ln(1-x)}.$$

und Funktionen $g_1, g_3, g_4 :]-\infty,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ bzw. $g_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} g_1(t) &:= f(t,0), \\ g_2(t) &:= f(0,t), \\ g_3(t) &:= f(t,\ln(1-t)) \quad \text{bzw.} \\ g_4(t) &:= -f(t,-\ln(1-t)) \end{aligned}$$

1 Punkt (a) Zeigen oder widerlegen Sie: g_1 ist strikt unimodal.

1 Punkt (b) Zeigen oder widerlegen Sie: g_2 ist strikt unimodal.

2 Punkte (c) Zeigen Sie: Die Funktionen g_3 und g_4 haben bei $t = 0$ ein striktes lokales Minimum.

4 Punkte (d) Bestimmen Sie die Menge aller lokalen Minima von der (ursprünglichen) Funktion f.

Aufgabe 10.

3 Punkte (a) Zeigen Sie: Ist S eine konvexe Menge und $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, so ist jedes strikt lokale Minimum auch strikt globales Minimum der Funktion.

1 Punkt (b) Zeigen oder widerlegen Sie:
Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

ist konvex.

6 Punkte (c) Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lccccccc} \min & x^2 & + & y^2 & + & z^2 & & \\ \text{unter} & x & + & y & + & z & = & 1. \end{array}$$

Ist die gefundene Lösung auch eine globale Lösung?

Aufgabe 11.

Die Firma *FutureFly* stellt solarbetriebene Flugrucksäcke her. Diese veganen Flugrucksäcke sind etwas für den umweltbewussten Menschen von morgen, der gern flexibel und selbstbestimmt bei schönem Wetter unterwegs ist. Dabei gibt es zwei Sorten, *AeroBigPac* und *AeroSmallPac*, und zwei Fabrikanten, wobei der erste für das Rucksacksystem und der zweite für die solarbetriebene Flugfunktion zuständig ist.
Der erste Fabrikant benötigt für einen AeroBigPac 5 Mann-Stunden und für einen AeroSmallPac 2 Mann-Stunden, wohingegen der zweite Fabrikant für jeden der beiden 3 Mann-Stunden braucht. Die Kapazität des ersten Fabrikanten liegt bei maximal 180 Mann-Stunden pro Woche und die des zweiten bei 135 Mann-Stunden pro Woche.
Weiterhin ist bekannt, dass FutureFly an einem AeroBigPac 3000 GE und an einem AeroSmallPac 2000 GE verdient.
Wieviele AeroBigpac und wieviele AeroSmallPac sollte FutureFly herstellen um den Gewinn zu maximieren?

4 Punkte (a) Modellieren Sie das Problem als LP und

5 Punkte (b) bestimmen Sie die Lösung mit einer Methode Ihrer Wahl.

Aufgabe 12.

4 Punkte Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \max & -8x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & & \\ \text{unter} & -2x_1 & - & 2x_2 & + & 8x_3 & \geq & -8 \\ & & - & 3x_2 & + & 5x_3 & \leq & 13 \\ & 3x_1 & + & & - & x_3 & \leq & 7 \\ & & & & & x_1,\dots,x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

mit einer Methode Ihrer Wahl.