Aufgabe 1.

5 Punkte Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

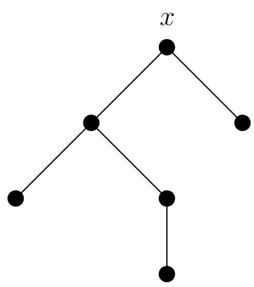
$$6\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = 2n(n+1)(n+2).$$

Aufgabe 2.

3 Punkte Sie würfeln mit einem fairen, 6-seitigen Würfel und werfen eine faire Münze. Sei A die angezeigte Augenzahl des Würfels. Ihr Gewinn beträgt $A+2$, wenn die Münze Kopf zeigt und $A-1$, wenn die Münze Zahl zeigt.
Was ist Ihr erwarteter Gewinn im Mittel?

Aufgabe 3.

Betrachten Sie den im Folgenden abgebildeten Baum T:



T

1 Punkt (a) Bestimmen Sie den Code des gepflanzten Baumes (T,x,ρ) mit Wurzel x aus der Abbildung und der Pflanzung ρ, bei der die Blattreihenfolge wie in der Abbildung oben von links nach rechts gegeben ist.

1 Punkt (b) Bestimmen Sie den Code des Wurzelbaumes (T,x) mit Wurzel x aus der Abbildung.

2 Punkte (c) Bestimmen Sie den Code des Baumes T.

7 Punkte (d) Zeigen Sie: Es gibt zwei untereinander nicht isomorphe und zu T nicht isomorphe Graphen G_1 und G_2 mit Valenzsequenz $(3,2,2,1,1,1)$. Beweisen Sie die paarweise Nichtisomorphie der drei Graphen G_1, G_2 und T.

3 Punkte (e) Zeigen Sie: Es gibt keine drei untereinander nicht isomorphe und zu T nicht isomorphe Graphen mit Valenzsequenz $(3,2,2,1,1,1)$.

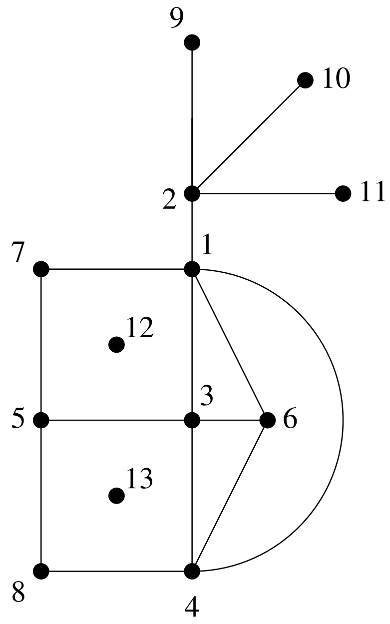
Tipp zu (d): Einer von den beiden Graphen G_1 und G_2 ist ein Baum.

Aufgabe 4.

5 Punkte Zeigen Sie: Zu jedem Baum T_1 existiert ein Baum T_2, so dass T_2 ein perfektes Matching besitzt und T_1 ein Teilgraph von T_2 ist.

Aufgabe 5.

Betrachten Sie den im Folgenden abgebildeten Graphen G:



G

2 Punkte (a) Führen Sie eine Breitensuche durch, wobei in den Nachbarschaften die Knoten gemäß der obigen Nummerierung in die Queue aufgenommen werden sollen (kleinste zuerst). Geben Sie den Breitensuchbaum und die Komponenten von G an.

2 Punkte (b) Zeigen Sie, dass G einen 2-zusammenhängenden Untergraph H mit 7 Knoten besitzt. Geben Sie eine Ohrenzerlegung von H an.

3 Punkte (c) Sei A die Adjazenzmatrix von G bezüglich der durch die Knotennummern in der Abbildung definierten Knotensortierung, $\mathbf{1} = (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)^\top \in \mathbb{R}^{13}$ der Vektor aus lauter Einsen und $b \in \mathbb{R}^{13}$ der Vektor der Einträge der (geordneten) Valenzsequenz von G. Zeigen Sie:

$$A\mathbf{1} = b.$$

1 Punkt (d) Zeigen oder widerlegen Sie:

Der Graph G enthält einen Weg P_6 der Länge 5 als induzierten Teilgraphen.

2 Punkte (e) Zeigen oder widerlegen Sie:

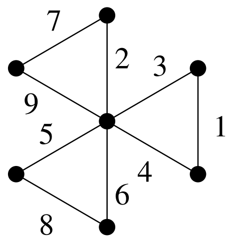
Der Graph G enthält einen Kreis der Länge $k \geq 6$ als induzierten Teilgraphen.

1 Punkt (f) Zeigen oder widerlegen Sie:

Für jeden induzierten Teilgraphen von G, der isomorph zu einem vollständigen Graphen K_n ist, gilt $n \leq 3$.

2 Punkte (g) Sei G' der Graph, der entsteht, wenn man in G die Kanten $\{5,9\}$, $\{1,10\}$ und $\{6,11\}$ hinzufügt und die Knoten 12 und 13 löscht. Zeigen Sie, dass der neue Graph G' eulersch ist und geben Sie eine Eulertour von G' an.

Aufgabe 6.
Betrachten Sie den im Folgenden abgebildeten, mit Kantengewichten versehenen Graphen G_0.



G_0

3 Punkte (a) Bestimmen Sie die Anzahl der aufspannenden Bäume von G_0.

2 Punkte (b) Bestimmen Sie einen minimalen aufspannenden Baum von G_0 bezüglich der angegebenen Kantengewichte.

Aufgabe 7.
3 Punkte Betrachten Sie folgenden Ausdruck

$$h(x) := \sqrt{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}} - \sqrt{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}}}$$

für sehr großes x.
Geben Sie eine numerisch stabile Auswertungsvorschrift für $h(x)$ an, die das Phänomen der Auslöschung vermeidet.

Aufgabe 8.
Seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4 Punkte (a) Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung von A.

4 Punkte (b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

1 Punkt (c) Berechnen Sie $\|A\|_1$.

Aufgabe 9.
Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x(x-1)(x-2), & \text{falls } x \geq 0; \\ -x(x+1)(x+2), & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

6 Punkte (a) Bestimmen Sie sämtliche lokale Minima von f.

2 Punkte (b) Welche der lokalen Minima sind globale Minima? Begründen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 10.

9 Punkte Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rccccccc} \min & x^2 & + & y & - & z & & \\ \text{unter} & x^2 & & & + & z & \leq & 3 \\ & x & + & y & + & z & = & 4. \end{array}$$

Aufgabe 11.

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Die Funktion $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$F(x) = \|x\|,$$

wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige Vektornorm des $\mathbb{R}^n$ bezeichne.

1 Punkt (a) Schreiben Sie die drei Normaxiome (N1), (N2) und (N3) auf.

3 Punkte (b) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Funktion F ist konvex.

3 Punkte (c) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Funktion F ist strikt konvex.

Aufgabe 12.

9 Punkte Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & x & + & 2y & & \\ & x & + & y & \leq & 4 \\ & -3x & + & 2y & \leq & 0 \\ & & & y & \geq & 1 \\ & -x & + & y & \geq & 1 \end{array}$$

mit einer Methode Ihrer Wahl.