Aufgabe 1.

Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \leq n.$$

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen die Behauptung per vollständiger Induktion über n.

Für $n = 0$ gilt

$$\sum_{k=1}^{0} \frac{1}{k} = 0 \leq 0$$

Damit ist die Verankerung erbracht.

Sei nun $n > 0$ und gelte die Behauptung für $n-1$, d.h. es gilt

$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{k} \leq n-1 \tag{IV}$$

Dann folgt mit $2^n - 1 = 2 \cdot 2^{n-1} - 1 = 2^{n-1} - 1 + 2^{n-1}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1+2^{n-1}} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{k} \\
&\overset{\text{(IV)}}{\leq} (n-1) + \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{k}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Da $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ für alle $k \geq 2^{n-1}$ gilt (siehe Hinweis), ist

$$\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{2^{n-1}} = (2^n - 1 - 2^{n-1} + 1)\frac{1}{2^{n-1}} = 1. \tag{2}$$

Daher ist

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \overset{(1)}{\leq} (n-1) + \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{k} \overset{(2)}{\leq} (n-1) + 1 = n$$

also gilt die Behauptung auch für n.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2.

Aus einer Kiste mit vier 2-Euro-Münzen, vier 1-Euro-Münzen und vier 50-Cent-Münzen werden zufällig zwei Münzen entnommen. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen jeder Münze gleich. Berechnen Sie den Erwartungswert des gezogenen Betrags.

Lösungsvorschlag:
Entscheidend für die Aufgabe ist, dass von allen Münzen mindestens zwei vorhanden sind und von allen gleich viele vorhanden sind. Sei k die Anzahl der Münzen von jeder Sorte (In der Aufgabenstellung ist $k = 4$). Dann haben wir für den ersten Zug insgesamt $3k$ Möglichkeiten und für den zweiten $3k-1$. Damit erhalten wir die Wahrscheinlichkeit $\frac{k}{3k} \cdot \frac{k-1}{3k-1} = \frac{k-1}{3(3k-1)}$, dass wir zwei 2-Euro-Münzen (analog zwei 1-Euro-Münzen bzw. zwei 50-Cent-Münzen) ziehen. Bei dem Ziehen von zwei verschiedenen Münzen haben wir jeweils die Wahrscheinlichkeit $\frac{k}{3k} \cdot \frac{k}{3k-1} = \frac{k}{3(3k-1)}$ für eine festgelegte Reihenfolge und $2 \cdot \frac{k}{3(3k-1)}$ wenn wir die Reihenfolge nicht beachten. Insgesamt erhalten wir für den Erwartungswert also:

$$\begin{aligned}
E =& \frac{k-1}{3(3k-1)} \cdot (2+2) + \frac{k-1}{3(3k-1)} \cdot (1+1) + \frac{k-1}{3(3k-1)} \cdot (0.5+0.5) \\
&+ 2 \cdot \frac{k}{3(3k-1)}(2+1) + 2 \cdot \frac{k}{3(3k-1)}(1+0.5) + 2 \cdot \frac{k}{3(3k-1)}(2+0.5) \\
=& \frac{k-1}{3(3k-1)}(4+2+1) + \frac{k}{3(3k-1)}(6+3+5) \\
=& \frac{7(k-1)+14k}{3(3k-1)} \\
=& \frac{21k-7}{3(3k-1)} \\
=& \frac{7(3k-1)}{3(3k-1)} = \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

Der Erwartungswert für den gezogenen Betrag ist also $\frac{7}{3} = 2,\bar{3}$.

Aufgabe 3.
Betrachten Sie die Relation

$$R := \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2),(4,3),(3,4)\}$$

auf der Menge $M := \{0,1,\dots,4\}$.

(a) Überprüfen Sie welche der Eigenschaften Reflexivität, Irreflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie und Transitivität die Relation R auf M erfüllt. Beweisen Sie ihre Behauptung.

Lösungsvorschlag:

- R ist nicht reflexiv: $(3,3)$ und $(4,4)$ sind nicht in R.
- R ist nicht irreflexiv: Denn $(1,1) \in R$.
- R ist symmetrisch: Da für jedes Tupel $(a,b) \in R$ auch (b,a) in R enthalten ist, ist die Relation R symmetrisch.
- R ist nicht antisymmetrisch: Denn $(1,2)$ und $(2,1)$ sind in R, aber $1 \neq 2$.
- R ist nicht transitiv: $(4,3)$ und $(3,4)$ sind in R, aber $(4,4)$ nicht.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine Äquivalenzrelation oder eine Partialordnung auf M.

Lösungsvorschlag:

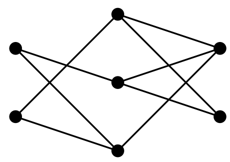
Da die Relation nicht reflexiv ist, ist sie weder eine Partialordnung noch eine Äquivalenzrelation.

(c) Welche Elemente müssen zu R mindestens hinzugefügt werden, damit eine reflexive, symmetrische und transitive Relation entsteht?

Lösungsvorschlag:

Wir erweitern R zu einer Relation R'. Damit R' reflexiv wird, müssen wir die fehlenden Diagonalelemente $(3,3)$ und $(4,4)$ hinzufügen. Durch das Hinzufügen dieser beiden Elemente bleibt die Symmetrie erhalten. Es bleibt also noch zu zeigen, dass $R' = R \cup \{(3,3),(4,4)\}$ transitiv ist. Dies ist der Fall, da für alle (a,b) und (b,c) in R' auch (a,c) in R' enthalten ist.

Aufgabe 4.
Betrachten Sie den Graphen.



(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Der Graph ist bipartit.

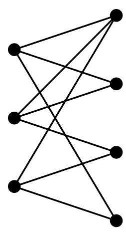
Lösungsvorschlag:

Der Graph ist bipartit, da er keine Kreise ungerader Länge enthält. Eine gültige Bipartition $V = V_1 \cup V_2$ besteht aus der Menge V_1 der mittleren Knoten und die restlichen vier Knoten bilden die zweite Menge, da sie keine Kanten induzieren.

(b) Geben Sie ein maximales Matching an und beweisen Sie die Maximalität.

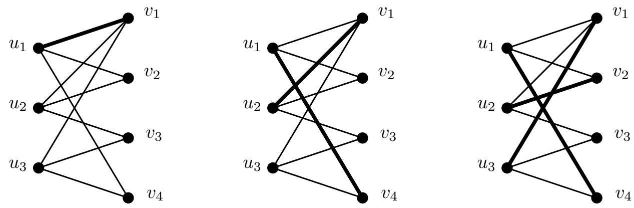
Lösungsvorschlag:

Wir sortieren den Graphen so um, dass wir die 3-elementige Bipartitionsmenge links und alle anderen Elemente rechts haben. Wir erhalten den folgenden Graphen:



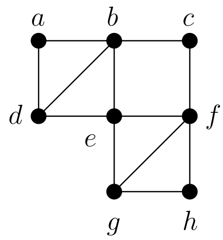
Wir bestimmen ein Matching mit dem ungarischen Algorithmus und starten mit dem leeren Matching $M = \emptyset$. Daher ist $Q = U$ die Menge aller ungematchten Knoten auf der linken Seite. Wir starten mit dem ersten Knoten u_1 und finden direkt einen M- augmentierenden Pfad der Länge 1 nach v_1. Diese Kante wird zu der Matchingkante, also

$M = \{v_1u_1\}$. Im nächsten Schritt finden wir einen M-augmentierenden Pfad $u_2v_1u_1v_2$ und tauschen Matchingkanten gegen nicht Matchingkanten.



Im letzten Schritt sind alle Knoten der linken Seite gematcht, wir können also keinen M- augmentierenden Pfad mehr finden.

Aufgabe 5.
Betrachten Sie den im Folgenden abgebildeten Graphen G:



G

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: G ist 2-zusammenhängend.

Geben Sie eine Ohrenzerlegung von G an, sofern eine solche existiert.

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen, dass G 2-zusammenhängend ist.

Eine Ohrenzerlegung von G besteht zum Beispiel aus dem unten angegebenen Kreis C_0 und den Wegen P_1, P_2, P_3, P_4:

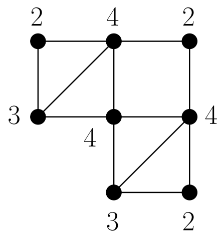
$$\begin{aligned} C_0 &= abd(a) \\ P_1 &= bed \\ P_2 &= bcfe \\ P_3 &= fge \\ P_4 &= fhg. \end{aligned}$$

Da G eine Ohrenzerlegung besitzt, ist G 2-zusammenhängend.

(b) Geben Sie die geordnete Valenzsequenz von G an.

Lösungsvorschlag:

Wir tragen die Knotengrade in den Graphen ein.



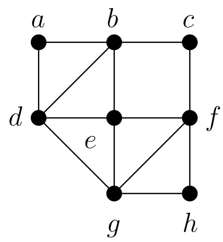
Somit lautet die geordnete Valenzsequenz von G:

$$(4,4,4,3,3,2,2,2).$$

(c) Zeigen Sie: Es gibt zwei nicht adjazente Knoten in G, so dass der Graph G', der aus G entsteht, wenn man diese beiden Knoten mit einer zusätzlichen Kante verbindet, eulersch ist. Geben Sie eine Eulertour von G' an.

Lösungsvorschlag:

Verbindet man die beiden Knoten vom Grad 3 (also d und g), so haben im entstehenden Graphen G' alle Knotengrade geraden Grad. Außerdem ist G nach (a) insbesondere zusammenhängend. Daher ist G' eulersch.



G'

Eine Eulertour in G' findet man mit dem Algorithmus aus dem Kurstext wie folgt: Erst finden wir den geschlossenen Kantenzug

$$a-b-c-f-e-b-d-a.$$

Im Knoten f finden wir einen weiteren geschlossenen Kantenzug

$$f-g-d-e-g-h-f.$$

Zusammengesetzt ergibt das die Eulertour

$$a-b-c-f-g-d-e-g-h-f-e-b-d-a.$$

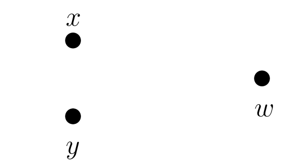
(d) Geben Sie einen nicht zu G isomorphen Graphen H an, der die gleiche Valenzsequenz wie G hat. Beweisen Sie die Nichtisomorphie von G und H.

Lösungsvorschlag:

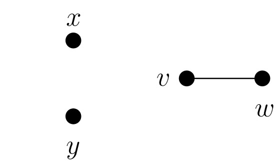
Wir benutzen, wie im Tipp angegeben, das Verfahren von Havel und Hakimi.

s	t	u	v	w	x	y	z	
4	4	4	3	3	2	2	2	
	3	3	2	2	2	2	2	(Schritt 1)
		2	1	1	2	2	2	(Schritt 2)
		u	x	y	z	v	w	
		2	2	2	2	1	1	(*umsortieren*)
			1	1	2	1	1	(Schritt 3)
			z	x	y	v	w	
			2	1	1	1	1	(*umsortieren*)
				0	0	1	1	(Schritt 4)
				v	w	x	y	
				1	1	0	0	(*umsortieren*)
					0	0	0	(Schritt 5)

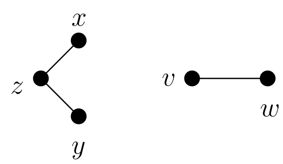
Den Graphen H konstruieren wir rückwärts aus den oben angegebenen Schritten wie folgt.



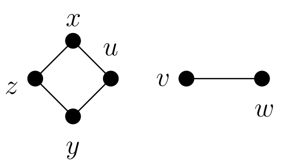
(nach Schritt 5)



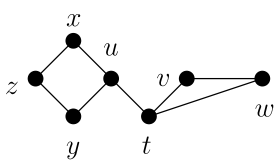
(nach Schritt 4)



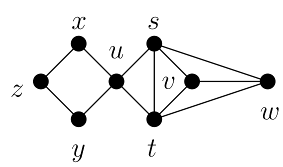
(nach Schritt 3)



(nach Schritt 2)



(nach Schritt 1)



H

Nun beweisen wir die Nichtisomorphie von G und H.

1. Beweismöglichkeit:

Nach (a) ist G 2-zusammenhängend. In (e) werden wir zeigen, dass H nicht 2-zusammenhängend ist. Somit sind G und H nicht isomorph.

2. Beweismöglichkeit:

In H sind die drei Knoten vom Grad 4 paarweise adjazent, in G aber nicht. Somit sind G und H nicht isomorph.

3. Beweismöglichkeit:

In H gibt es einen Knoten vom Grad 2, der zu den beiden anderen Knoten vom Grad 2 benachbart ist, in G gibt es gar keine benachbarten Knoten vom Grad 2. Somit sind G und H nicht isomorph.

4. Beweismöglichkeit:

In H gibt es vier paarweise benachbarte Knoten, in G gibt es keine solchen vier Knoten, da von den fünf Knoten vom Grad 3 oder 4 jeweils höchstens drei paarweise benachbart sind. Somit sind G und H nicht isomorph.

(e) Zeigen oder widerlegen Sie: Der in (d) gefundene Graph H ist 2-zusammenhängend.

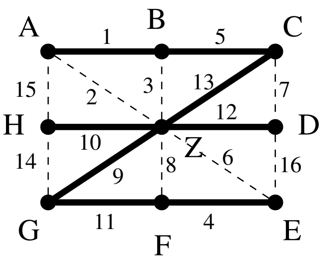
Geben Sie eine Ohrenzerlegung von H an, sofern eine solche existiert.

Lösungsvorschlag:

Unser H ist nicht 2-zusammenhängend, denn wenn man den Knoten u entfernt, so zerfällt der Restgraph in die beiden von $\{x, y, z\}$ bzw. $\{s, t, v, w\}$ induzierten Komponenten.

Da H nicht 2-zusammenhängend ist, existiert keine Ohrenzerlegung.

Aufgabe 6.
Betrachten Sie den im Folgenden abgebildeten Graphen B, bei dem es sich um ein Baumpaar handelt, dessen Kantenmenge zerlegt werden kann in die Kantenmenge eines aufspannenden Baumes T_1 (fette durchgezogene Kanten) und die Kantenmenge eines aufspannenden Baumes T_2 (dünne gestrichelte Kanten):



B

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Bäume T_1 und T_2 sind isomorph.

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen, dass T_1 und T_2 isomorph sind.

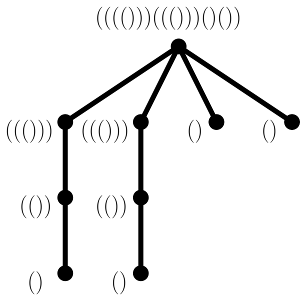
1. Beweismöglichkeit: Angabe eines expliziten Isomorphismus

Man sieht, dass z.B. eine Rotation des Baumes T_1 um 90^o im Gegenuhrzeigersinn einen möglichen Isomorphismus von T_1 nach T_2 liefert. Explizit kann dieser Isomorphismus bezüglich der Knotenbeschriftungen in der obigen Zeichnung wie folgt angegeben werden:

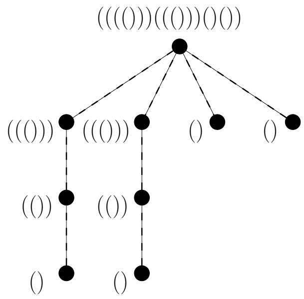
$$
\begin{array}{ccc}
A & \longmapsto & G \\
B & \longmapsto & H \\
C & \longmapsto & A \\
D & \longmapsto & B \\
E & \longmapsto & C \\
F & \longmapsto & D \\
G & \longmapsto & E \\
H & \longmapsto & F \\
Z & \longmapsto & Z
\end{array}
$$

2. Beweismöglichkeit: Baumcodes

Beide Bäume haben ein einelementiges Zentrum, nämlich den zentralen Knoten in der Zeichnung. Beide haben jeweils vier am Zentrum hängende Unterbäume, mit den Codes ((())), ((())), () und (). Somit haben beide Bäume den Code $(((()))((()))()())$ und sind somit isomorph.



T_1

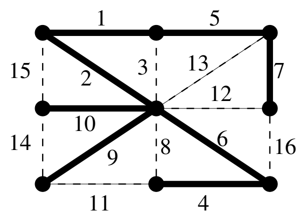


T_2

(b) Betrachten Sie den Graphen B zusammen mit den in der obigen Zeichnung angegebenen Kantengewichten. Bestimmen Sie einen minimalen aufspannenden Baum von B.

Lösungsvorschlag:

Nach dem Verfahren von Kruskal betrachten wir die Kanten in aufsteigender Gewichtsreihenfolge und nehmen eine Kante genau dann hinzu, wenn sie keinen Kreis schließt. Damit erhalten wir den aufspannenden Baum T, der in der folgenden Zeichnung fett hervorgehoben ist. Dieser ist nach Aufgabe 4.5.5 b) der eindeutige minimale aufspannende Baum, da alle Kantengewichte paarweise verschieden sind.



T

Aufgabe 7.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die LU-Zerlegung von A.

Lösungsvorschlag:

Wir berechnen die LU-Zerlegung von A. Dazu bringen wir die Matrix A mit Hilfe des Gauß-Algorithmus in obere Dreiecksform und notieren die verwendeten Umrechnungsschritte.

$$\begin{array}{cccc} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 0 & -4 & -8 \\ -1 & 6 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Da nun an dem zweiten Diagonaleintrag eine 0 ist, müssen wir die zweite und dritte Zeile vertauschen. Dann erhalten wir:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 6 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & \boxed{-4} & -8 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 6 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & -4 & -8 \\ 1 & 0 & -0.25 & -1 \end{array}$$

Damit erhalten wir die $PA = LU$ mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -0.25 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wobei

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Permutationsmatrix ist, die die zweite und dritte Zeile vertauscht.

(b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (2, 4, -3, 3)^\top$.

Lösungsvorschlag:

Mit Hilfe von (a) erhalten wir $PAx = LUx = Pb = (2,-3,4,3)^\top$. Wir lösen zunächst das LGS

$$Ly = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -0.25 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = Pb$$

Wir lesen die folgende Lösung ab

$$y_1 = 2,\ y_2 = -3+2 = -1,\ y_3 = 4-4 = 0,\ y_4 = 3-2 = 1.$$

Nun lösen wir das LGS

$$Ux = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dort können wir die Lösung

$$x_4 = -1,\ x_3 = -\frac{1}{4}(0-8) = 2,\ x_2 = \frac{1}{6}(-1-10+5) = -1,\ x_1 = 2+2-6+4 = 2$$

ablesen. Die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ ist daher $x = (2,-1,2,-1)^\top$.

(c) Bestimmen Sie $\|A\|_1$.

Lösungsvorschlag:

Wir bestimmen die Spaltensummennorm der Matrix A. Es ist

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max\{1+2+|-1|+1, 2+4+4+2, 3+2+2+4, 4+0+1+5\} \\ &= \max\{5,12,11,10\} \\ &= 12 \end{aligned}$$

Aufgabe 8.
Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{llllllll} \min & 4x^2+3x & + & 2y & - & z & & \\ \text{unter} & x & + & y & + & z & = & 1 \\ & x & + & y^2 & + & z & \leq & 7. \end{array}$$

Lösungsvorschlag:

1. Lösungsmöglichkeit: Substitution und Kuhn-Tucker-Bedingungen

Mittels der aus der Gleichungsbedingung erhaltenen Substitution

$$z = 1 - x - y$$

erhalten wir ein Optimierungsproblem in zwei Variablen:

$$\begin{array}{llcll} \min & 4x^2 + 4x & + & 3y & - & 1 \\ \text{unter} & & & y^2 - y & & \leq & 6. \end{array}$$

Dieses hat die Form

$$\begin{array}{lll} \min & f(x,y) & \\ \text{unter} & g(x,y) & \leq & 0 \end{array}$$

mit

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 4x^2 + 4x + 3y - 1 \\ g(x,y) &= y^2 - y - 6. \end{aligned}$$

Zunächst berechnen wir die Gradienten:

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (8x + 4, 3) \\ \nabla g(x,y) &= (0, 2y - 1) \end{aligned}$$

Da $\nabla f(x,y) \neq (0,0)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, liegt kein lokales Extremum im Inneren des Zulässigkeitsbereichs. Jedes lokale Minimum muss also notwendigerweise am Rand liegen, d.h. wir können davon ausgehen, dass die Ungleichungsnebenbedingung aktiv ist, d.h. dass

$$y^2 - y - 6 = 0 \tag{3}$$

gilt.

Die Bedingung

$$\nabla g(x,y) = (0,0)$$

impliziert, dass $y = \frac{1}{2}$ gilt. Wegen

$$g\left(x, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 6 = -\frac{25}{4} \neq 0$$

liegt aber keiner der Punkte $\left(x, \frac{1}{2}\right)$ auf dem Rand des Zulässigkeitsbereichs. Also sind alle Randpunkte des Zulässigkeitsbereichs reguläre Punkte der Nebenbedingungen. Daher sind notwendige Bedingungen dafür, dass an der Stelle (x,y) ein lokales Minimum vorliegt, die folgenden Kuhn-Tucker-Bedingungen: Es gibt ein $\mu \leq 0$, so dass

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \mu \nabla g(x,y) \\ (y^2 - y - 6)\mu &= 0, \end{aligned}$$

d.h., wegen (3) vereinfacht,

$$\begin{aligned} 8x+4 &= 0 && (4)\\ 3 &= (2y-1)\mu && (5)\\ y^2-y-6 &= 0. && (6) \end{aligned}$$

Aus (4) folgt sofort, dass $x = -\frac{1}{2}$.
Aus (3) folgt mit der pq-Formel zur Lösung der quadratischen Gleichung

$$y^2 - y - 6 = 0,$$

dass

$$y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6},$$

d.h.

$$y \in \{3, -2\}.$$

Für $y = 3$ folgt aus (5), dass $\mu = \frac{3}{5}$ ist, was im Widerspruch zu $\mu \leq 0$ steht. Somit kommt $y = 3$ nicht als Kandidat für ein lokales Minimum in Frage.
Für $y = -2$ folgt aus (5), dass $\mu = -\frac{3}{5}$. Somit ist $(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, -2\right)$ der einzige Kandidat für ein lokales Minimum.
Wir betrachten nun die Zielfunktion $f(x, y)$ auf den Randpunkten $(x, 3)$ bzw. $(x, -2)$ des Zulässigkeitsbereichs. Für festes y gilt

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x, y) = +\infty.$$

Damit handelt es sich bei dem Kandidaten $(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, -2\right)$ tatsächlich um ein Minimum der Optimierungaufgabe, nämlich sogar um ein globales Minimum.
[Außerdem könnten wir daraus schlussfolgern, dass an der Stelle $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ ein Sattelpunkt vorliegt.]
Der optimale Zielfunktionswert lautet

$$f\left(-\frac{1}{2}, -2\right) = -8.$$

Nach Rücksubstitution errechnen wir

$$z = 1 - x - y = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) - (-2) = \frac{7}{2}.$$

Also ist

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, -2, \frac{7}{2}\right)$$

das eindeutige globale Minimum der ursprünglichen Optimierungsaufgabe.

2. Lösungsmöglichkeit: Substitution und direkte Entkopplung der Varibalen
Mittels der aus der Gleichungsbedingung erhaltenen Substitution

$$z = 1 - x - y$$

erhalten wir ein Optimierungsproblem in zwei Variablen:

$$\begin{array}{lrcl} \min & 4x^2 + 4x + 3y - 1 & & \\ \text{unter} & y^2 - y & \leq & 6. \end{array}$$

Dieses hat die Form

$$\begin{array}{lrcl} \min & f(x,y) & & \\ \text{unter} & g(x,y) & \leq & 0 \end{array}$$

mit

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 4x^2 + 4x + 3y - 1 \\ g(x,y) &= y^2 - y - 6. \end{aligned}$$

Es fällt auf, dass g nur von y abhängt und in der Zielfunktion die beiden Variablen entkoppelt sind, so dass die Menge S der Optimallösungen des obigen Problems gegeben ist durch

$$S = S_x \times S_y,$$

wobei S_x die Menge der Optimallösungen des Problems

$$\min\ 4x^2 + 4x \tag{7}$$

und S_y die Menge der Optimallösungen des Problems

$$\begin{array}{lrcl} \min & 3y - 1 & & \\ \text{unter} & y^2 - y & \leq & 6 \end{array} \tag{8}$$

ist.
Wir bestimmen zunächst S_x. Sei dazu

$$F(x) := 4x^2 + 4x.$$

Dann ist

$$F'(x) = 8x + 4$$

und

$$F''(x) = 8 > 0,$$

also ist die Lösung von $F'(x) = 0$, d.h. der Wert $x = -\frac{1}{2}$, das eindeutige globale Minimum der strikt konvexen Funktion F. Somit folgt

$$S_x = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}.$$

Nun bestimmen wir S_y. Seien dazu

$$\widetilde{F}(y) := 3y - 1$$

und

$$G(y) := y^2 - y - 6.$$

Es gilt

$$G(y) = 0 \Longleftrightarrow y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} \Longleftrightarrow y \in \{3, -2\},$$

also

$$G(y) \leq 0 \Longleftrightarrow y \in [-2, 3].$$

Da $\widetilde{F}$ streng monoton wachsend ist, nimmt $\widetilde{F}$ auf dem Intervall $[-2, 3]$ sein eindeutiges globales Minimum an der linken Intervallgrenze -2 an. Somit ist

$$S_y = \{-2\}.$$

Also ist $S = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, -2\right) \right\}$, d.h. das eindeutige globale Minimum der Optimierungsaufgabe liegt bei $(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, -2\right)$. Der optimale Zielfunktionswert lautet

$$f\left(-\frac{1}{2}, -2\right) = -8.$$

Nach Rücksubstitution errechnen wir

$$z = 1 - x - y = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) - (-2) = \frac{7}{2}.$$

Also ist

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, -2, \frac{7}{2}\right)$$

das eindeutige globale Minimum der ursprünglichen Optimierungsaufgabe.

Aufgabe 9.

Seien $f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ Funktionen, $r_1, r_2 > 0$.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Falls f_1, f_2 strikt konvex sind, so ist die Funktion

$$f(x) = r_1 f_1(x) + r_2 f_2(x)$$

strikt konvex.

Lösungsvorschlag: Wir zeigen die Aussage:

Seien f_1, f_2 zwei strikt konvexe Funktionen und $r_1, r_2 > 0$. Dann gilt für alle $x, y \in [a, b]$, $\lambda \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= r_1 f_1(\lambda x + (1-\lambda)y) + r_2 f_2(\lambda x + (1-\lambda)y) \\ &< r_1 \left(\lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_1(y)\right) + r_2 f_2(\lambda x + (1-\lambda)y) && (9) \\ &< r_1 \left(\lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_1(y)\right) + r_2 \left(\lambda f_2(x) + (1-\lambda) f_2(y)\right) && (10) \\ &= \lambda (r_1 f_1(x) + r_2 f_2(x)) + (1-\lambda)(r_1 f_1(y) + r_2 f_2(y)) \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \end{aligned}$$

Damit ist f strikt konvex. Dabei haben wir in (9) die strikte Konvexität von f_1 und in (10) die strikte Konvexität von f_2 ausgenutzt.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie: Falls f_1, f_2 strikt unimodal sind, so ist auch

$$f(x) = r_1 f_1(x) + r_2 f_2(x)$$

strikt unimodal.

Lösungsvorschlag: Wir widerlegen die Aussage.

Wir betrachten zwei lineare Funktionen f_1, f_2 auf einem beliebigen Intervall (z.B. $[a,b] = [0,10]$). Für $r_1 = r_2 = 1$ und $f_1 = x, f_2 = -x$ gilt $f(x) = 0$. Daher ist f nicht strikt unimodal, da jeder Punkt des Intervalls ein lokales Minimum ist. f_1 hat an dem linken Randpunkt des Intervalls ein lokales Minimum und f_2 hat genau an dem rechten Randpunkt des Intervalls ein lokales Minimum. Daher sind beide strikt unimodal.

Aufgabe 10.
Sei $f : [0,42] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = |x-4| + |x-8| + 3 \cdot |x-10|.$$

Bestimmen Sie eine Approximation für ein Minimum von f auf dem Intervall $[0,42]$ mittels einer Fibonaccisuche mit 4 Schritten.

Lösungsvorschlag:
Wir bestimmen zunächst die Fibonaccizahlen bis $F_{4+3} = F_7$:

$$F_0 = 1, F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, F_5 = 8, F_6 = 13, F_7 = 21.$$

Die Schritte der Fibonaccisuche lauten dann

Schritt	a	x	y	b	$f(x)$	$f(y)$
1	0	16	26	42	38	88
2	0	10	16	26	8	38
3	0	6	10	16	16	8
4	6	10	12	16	8	18
Ende	6	8	10	12		

Als Approximation z für das Mimimum wird am Ende ausgegeben

$$z = \frac{a+b}{2} = 9.$$

Aufgabe 11.

Ein neu erscheinender Bestseller wird in zwei verschiedenen Druckereien (D_1 und D_2) hergestellt und soll an drei Grossisten (G_1, G_2 und G_3) aus geliefert werden. In Druckerei D_1 werden 100.000 Exemplare gedruckt, in Druckerei D_2 sogar 800.000 Exemplare. Die Grossisten haben den in der folgenden Tabelle angegebenen Bedarf.

G_1	G_2	G_3
50.000	250.000	600.000

Die Transportkosten von Druckerei D_i zum Grossisten G_j (in Euro pro 1.000 Buchexemplare) sind in der folgenden Tabelle angegeben:

	G_1	G_2	G_3
D_1	217	85	101
D_2	53	67	79

Modellieren Sie das Problem, die Bücher möglichst kostengünstig zu den Grossisten zu transportieren, als lineares Optimierungsproblem.

Lösungsvorschlag:

Als Variablen $x_{i,j}$ definieren wir die Anzahl an Tausenderpaketen von Büchern, die von Druckerei i zum Grossisten j transportiert wird.
Dann lautet die Zielfunktion

$$\min 217x_{1,1} + 85x_{1,2} + 101x_{1,3} + 53x_{2,1} + 67x_{2,2} + 79x_{2,3}.$$

Als Nebenbedingungen haben wir die Bedarfsbedingungen der Grossisten:

$$\begin{array}{cccccccc} x_{1,1} & & & + & x_{2,1} & & & = 50 \\ & x_{1,2} & & & + & x_{2,2} & & = 250 \\ & & x_{1,3} & & & + & x_{2,3} & = 600; \end{array}$$

die Produktionsmengenbeschränkungen der Druckereien:

$$\begin{array}{rcl} x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} & & \leq 100 \\ & x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} & \leq 800; \end{array}$$

die Nichtnegativitätsbedingungen:

$$x_{i,j} \geq 0 \quad \text{für } i = 1,2, j = 1,2,3;$$

und theoretisch auch die Ganzzahligkeitsbedingungen (da nichts über die Transportkosten angefangener Tausenderpakete von Büchern gesagt wird):

$$x_{i,j} \in \mathbb{Z} \quad \text{für } i = 1,2, j = 1,2,3.$$

(Die Ganzzahligkeitsbedingungen kann man bei diesem Problemtyp, für den es einen kombinatorischen Lösungsalgorithmus gibt, allerdings vernachlässigen, daher ist eine Lösung unter Weglassung der Ganzzahligkeitsbedingungen auch komplett richtig.)

Aufgabe 12.
Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rrcrcrcc} \max & 2x & + & y & + & 2z & & \\ & 2x & + & 2y & - & z & \leq & 3 \\ & & & y & + & z & \leq & 4 \\ & x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & & & & x,y,z & \geq & 0 \end{array}$$

mit einer Methode Ihrer Wahl.

Lösungsvorschlag:
Nach der aus der Gleichungsbedingung erhaltenen Substitution

$$z = x + y$$

bekommen wir das Problem

$$\begin{array}{rrcrcc} \max & 4x & + & 3y & & \\ & x & + & y & \leq & 3 \\ & x & + & 2y & \leq & 4 \\ & & & x,y & \geq & 0. \end{array}$$

Dieses lösen wir auf zwei verschiedene Weisen.
1. Lösungsmöglichkeit: Simplexalgorithmus
Das Starttableau lautet:

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

Nach dem ersten Pivotschritt erhalten wir:

$$\begin{array}{rrrr|r} 0 & -1 & -4 & 0 & -12 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

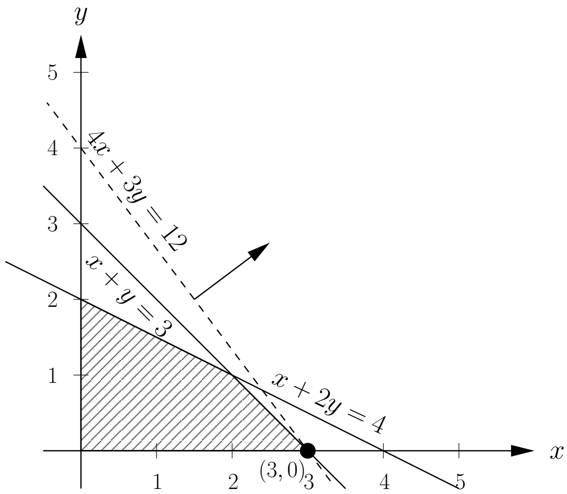
Das Tableau ist optimal. Wir lesen als Optimallösung $(x,y) = (3,0)$ ab. Der optimale Zielfunktionswert beträgt 12.
Nach Rücksubstitution

$$z = x + y = 3 + 0 = 3$$

erhalten wir als Optimallösung für unser ursprüngliches Problem

$$(x,y,z) = (3,0,3).$$

2. Lösungsmöglichkeit: grafische Lösung



Wir lesen als Optimallösung $(x,y) = (3,0)$ ab und errechnen den optimalen Zielfunktionswert als

$$4x + 3y = 12.$$

Nach Rücksubstitution

$$z = x + y = 3 + 0 = 3$$

erhalten wir als Optimallösung für unser ursprüngliches Problem

$$(x,y,z) = (3,0,3).$$