Aufgabe 1.

6 Punkte Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \leq n.$$

Hinweis: Für $k \geq 2^{n-1}$ ist $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Aufgabe 2.

4 Punkte Aus einer Kiste mit vier 2-Euro-Münzen, vier 1-Euro-Münzen und vier 50-Cent-Münzen werden zufällig zwei Münzen entnommen. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen jeder Münze gleich. Berechnen Sie den Erwartungswert des gezogenen Betrags.

Aufgabe 3.

Betrachten Sie die Relation

$$R := \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2),(4,3),(3,4)\}$$

auf der Menge $M := \{0,1,\dots,4\}$.

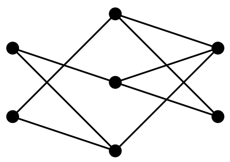
4 Punkte (a) Überprüfen Sie welche der Eigenschaften Reflexivität, Irreflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie und Transitivität die Relation R auf M erfüllt. Beweisen Sie ihre Behauptung.

1 Punkte (b) Zeigen oder widerlegen Sie: R ist eine Äquivalenzrelation oder eine Partialordnung auf M.

2 Punkte (c) Welche Elemente müssen zu R mindestens hinzugefügt werden, damit eine reflexive, symmetrische und transitive Relation entsteht?

Aufgabe 4.

Betrachten Sie den Graphen.

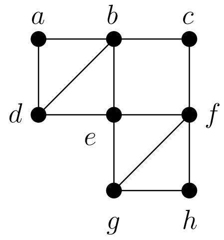


2 Punkte (a) Zeigen oder widerlegen Sie: Der Graph ist bipartit.

4 Punkte (b) Geben Sie ein maximales Matching in dem Graphen an und beweisen Sie die Maximalität.

Aufgabe 5.

Betrachten Sie den im Folgenden abgebildeten Graphen G:



G

2 Punkte (a) Zeigen oder widerlegen Sie: G ist 2-zusammenhängend.

Geben Sie eine Ohrenzerlegung von G an, sofern eine solche existiert.

1 Punkt (b) Geben Sie die geordnete Valenzsequenz von G an.

2 Punkte (c) Zeigen Sie: Es gibt zwei nicht adjazente Knoten in G, so dass der Graph G', der aus G entsteht, wenn man diese beiden Knoten mit einer zusätzlichen Kante verbindet, eulersch ist. Geben Sie eine Eulertour von G' an.

8 Punkte (d) Geben Sie einen nicht zu G isomorphen Graphen H an, der die gleiche Valenzsequenz wie G hat. Beweisen Sie die Nichtisomorphie von G und H.

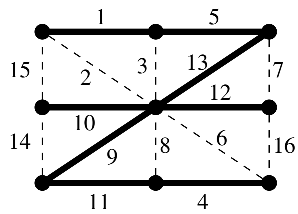
2 Punkte (e) Zeigen oder widerlegen Sie: Der in (d) gefundene Graph H ist 2-zusammenhängend.

Geben Sie eine Ohrenzerlegung von H an, sofern eine solche existiert.

Tipp zu (d): Havel-Hakimi.

Aufgabe 6.

Betrachten Sie den im Folgenden abgebildeten Graphen B, bei dem es sich um ein Baumpaar handelt, dessen Kantenmenge zerlegt werden kann in die Kantenmenge eines aufspannenden Baumes T_1 (fette durchgezogene Kanten) und die Kantenmenge eines aufspannenden Baumes T_2 (dünne gestrichelte Kanten):



B

5 Punkte (a) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Bäume T_1 und T_2 sind isomorph.

2 Punkte (b) Betrachten Sie den Graphen B zusammen mit den in der obigen Zeichnung angegebenen Kantengewichten. Bestimmen Sie einen minimalen aufspannenden Baum von B.

Aufgabe 7.
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

4 Punkte (a) Bestimmen Sie die LU-Zerlegung von A.

4 Punkte (b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (2, 4, -3, 3)^\top$.

1 Punkte (c) Bestimmen Sie $\|A\|_1$.

Aufgabe 8.
9 Punkte Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{llllllll} \min & 4x^2 + 3x & + & 2y & - & z & & \\ \text{unter} & x & + & y & + & z & = & 1 \\ & x & + & y^2 & + & z & \leq & 7. \end{array}$$

Hinweis: Sie können eine Variable eliminieren und dann die Aufgabe für jede verbliebene Variable entkoppelt lösen.

Aufgabe 9.
Seien $f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ Funktionen, $r_1, r_2 > 0$.

4 Punkte (a) Zeigen oder widerlegen Sie: Falls f_1, f_2 strikt konvex sind, so ist die Funktion

$$f(x) = r_1 f_1(x) + r_2 f_2(x)$$

strikt konvex.

4 Punkte (b) Zeigen oder widerlegen Sie: Falls f_1, f_2 strikt unimodal sind, so ist auch

$$f(x) = r_1 f_1(x) + r_2 f_2(x)$$

strikt unimodal.

Hinweis zu (b): Betrachten Sie Funktionen f_1 und f_2, die strikt unimodal und konvex, aber nicht strikt konvex sind.

Aufgabe 10.

5 Punkte Sei $f : [0,42] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = |x-4| + |x-8| + 3 \cdot |x-10|.$$

Bestimmen Sie eine Approximation für ein Minimum von f auf dem Intervall $[0,42]$ mittels einer Fibonaccisuche mit 4 Schritten.

Aufgabe 11.

6 Punkte Ein neu erscheinender Bestseller wird in zwei verschiedenen Druckereien (D_1 und D_2) hergestellt und soll an drei Grossisten (G_1, G_2 und G_3) aus geliefert werden. In Druckerei D_1 werden 100.000 Exemplare gedruckt, in Druckerei D_2 sogar 800.000 Exemplare. Die Grossisten haben den in der folgenden Tabelle angegebenen Bedarf.

G_1	G_2	G_3
50.000	250.000	600.000

Die Transportkosten von Druckerei D_i zum Grossisten G_j (in Euro pro 1.000 Buchexemplare) sind in der folgenden Tabelle angegeben:

	G_1	G_2	G_3
D_1	217	85	101
D_2	53	67	79

Modellieren Sie das Problem, die Bücher möglichst kostengünstig zu den Grossisten zu transportieren, als lineares Optimierungsproblem.

Aufgabe 12.

8 Punkte Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \max & 2x & + & y & + & 2z & & \\ & 2x & + & 2y & - & z & \leq & 3 \\ & & & y & + & z & \leq & 4 \\ & x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & & & & x,y,z & \geq & 0 \end{array}$$

mit einer Methode Ihrer Wahl.