

**Aufgabe 1**  
**(Rekursionsgleichungen)**

18 Punkte

Geben Sie eine geschlossene Formel für die nachfolgenden Rekursionsgleichungen an. Führen Sie mittels vollständiger Induktion einen Korrektheitsbeweis Ihrer Formel durch.

(a)  $T(0) = 0, T(1) = 1,$  4 Punkte  
 $T(n) = 2T(n-1) - T(n-2) + 2, \text{ für } n > 1.$

(b)  $T(0) = p > 0,$  6 Punkte  
 $T(n) = T(n-1) + n + p, \text{ für } n > 0.$

(c)  $T(0)=0, T(1)=2,$  8 Punkte  
 $T(n) = 3T(n-1) - 2T(n-2) - 2n + 4, \text{ für } n > 1.$

**Aufgabe 2**  
**(B-Bäume)**

14 Punkte

(a) 8 Punkte

Erzeugen Sie einen B-Baum der Ordnung 1, indem Sie in einen leeren Baum nacheinander die Schlüsselemente

10, 20, 19, 18, 12, 13, 8 und 9

einfügen. Stellen Sie jeweils die Bäume dar, für die eine *Overflow-Operation* durchgeführt werden muß: Markieren Sie das entsprechende Blatt und stellen Sie außerdem das Ergebnis der *Overflow-Operation* dar. Zeichnen Sie abschließend den Baum, der als Ergebnis aller Einfügeoperationen entsteht.

(b) 6 Punkte

Löschen Sie aus dem in Aufgabenteil (a) erzeugten B-Baum (der Ordnung 1) nacheinander die Schlüsselemente

20, 19, 18 und 13.

Stellen Sie die Bäume dar, in denen eine *Underflow-Behandlung* nötig ist und markieren Sie den entsprechenden Knoten im Baum. Geben Sie an, mit welcher Operation zu reagieren ist und stellen Sie den Ergebnisbaum dieser Operation dar.

**Aufgabe 3  
(Shellsort)**

18 Punkte

Eine Folge  $a_1, \dots, a_n$  heißt *h-sortiert* ( $1 \leq h \leq n-1$ ), wenn für alle  $i$  ( $1 \leq i \leq n-h$ ) gilt  $a_i \leq a_{i+h}$ .

Zum Beispiel ist die Folge 3,7,15,4, 19,17

3-sortiert, während die Folge

5, 17, 13,27,6, 18

4-sortiert ist. Eine vollständig sortierte Folge ist demnach 1-sortiert. Die Idee des Verfahrens *Shellsort* besteht nun darin, die Ausgangsfolge zunächst mittels verschiedener (abnehmender) *h-Werte* vorzusortieren, bevor im letzten Schritt vollständig sortiert wird. Eine solche Folge von *h-Werten* nennt man *Inkrementfolge*. *Shellsort* arbeitet folgendermaßen: Für jedes *h* der Inkrementfolge wird die Ausgangsfolge durchlaufen, dabei werden die Elemente  $a_i$  und  $a_{i+h}$  vertauscht, falls  $a_i > a_{i+h}$  gilt. Sobald eine Vertauschung durchgeführt wurde, muß die Folge noch einmal rückwärts in *h-Schritten* durchlaufen werden, da dieser Vorgang weitere Vertauschungen nach sich ziehen könnte.

Beispiel:  $h = 3$ , Ausgangsfolge: 1,3,7,9,6, 1,5,8,... Dann werden zuerst 1 und 9 verglichen, danach 9 und 5. Jetzt muß getauscht werden, die Folge lautet dann.

1,3,7,5,6,1,9,8,...

Nun muß überprüft werden, ob das Element 5 noch weiter an den Anfang der Folge geschrieben werden muß. Dies ist aber wegen  $1 < 5$  nicht der Fall. Die Folge kann jetzt weiter in 3-er Schritten vorwärts durchlaufen werden.

Der Durchlauf von *Shellsort* mit  $h = 1$  entspricht einem Aufruf von *Insertionsort*.

(a)

6 Punkte

Sortieren Sie die Folge

6,35, 12,22,2, 13,9,28, 17

mit *Shellsort*. Benutzen Sie dabei die Inkrementfolge

5,3, 1.

Markieren Sie jeweils die Elemente, die Sie vertauschen müssen und geben Sie nach jedem Vertauschungsschritt die neue Folge an.

(b)

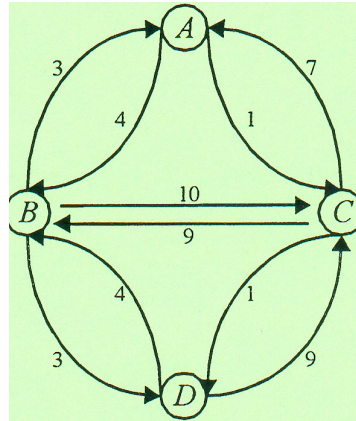
12 Punkte

Geben Sie einen Algorithmus für *Shellsort* an, dem die Inkrementfolge zusammen mit der Ausgangsfolge als Parameter (in zwei Arrays) übergeben wird.

**Aufgabe 4**  
**(Graph-Algorithmen)**

16 Punkte

Berechnen Sie in dem unten gezeigten Graphen  $G$  mit dem Algorithmus aus dem Kurstext (Floyd) die Kosten der kürzesten Pfade zwischen allen Knoten. Bearbeiten Sie die Knoten in lexikographischer Reihenfolge und geben Sie als Zwischenschritte den Graphen nach der vollständigen Bearbeitung der einzelnen Knoten an. Zeichnen Sie dabei in einem Schritt neu eingefügte Kanten mit gestrichelten Linien.

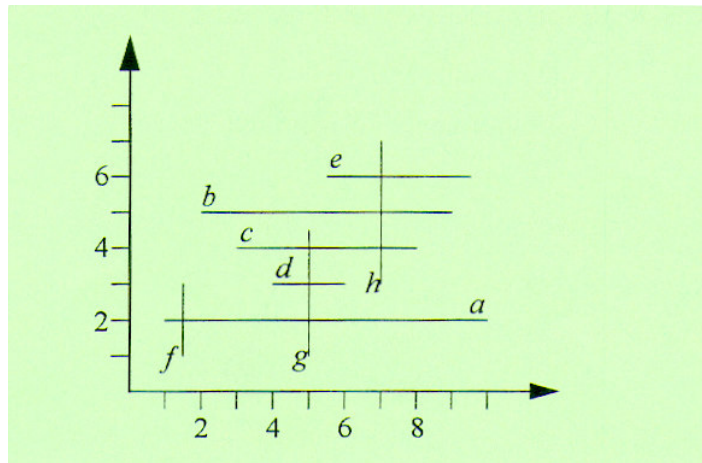


**Aufgabe 5**  
**(Geometrische Algorithmen)**

18 Punkte

(a) 8 Punkte  
Skizzieren Sie den Plane-Sweep Algorithmus zur Lösung des Segmentschnitt-Problems für achsenparallele Liniensegmente, benutzen Sie einen Range-Baum als Sweep-Status-Struktur und führen Sie eine Laufzeitanalyse durch.

(b) 10 Punkte  
Betrachten Sie die untenstehende Eingabemenge:



(i)

Listen Sie alle Range-Baum-Operationen auf, die an den einzelnen Haltepunkten ausgeführt werden.

(ii)

Zeichnen Sie eine Momentaufnahme des Range-Baumes am 9. Haltepunkt der Sweepline. Dabei soll der Range-Baum möglichst wenig Speicherplatz belegen.

(iii) Wie findet man im Range-Baum zu einem Query-Intervall die darin enthaltenen Koordinaten?

**Aufgabe 6**  
**(Durchlaufstrategien)**

16 Punkte

Ein Vielwugsuchbaum läßt sich auch als ungerichteter Graph ohne Zyklen beschreiben.  
Gesucht ist hier nun ein solcher Baum mit folgenden Eigenschaften:

. Ein *depth-first-Durchlauf* durch den Graphen beginnend bei dem Knoten mit der Markierung F liefert die Folge

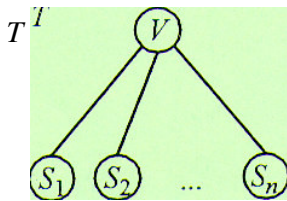
F, D, C, B, G, I, H, E, A, M, K, J, L, N

als Ergebnis.

. Ein *postorder-Durchlauf* durch den Baum erzeugt die Folge

C, G, I, H, B, D, A, E, J, K, L, N, M, F,

wobei *postorder* für einen Teilbaum *T* im Vielwugsuchbaum wie folgt definiert ist:



$$\text{postorder}(T) = (\text{postorder}(S_1), \dots, \text{postorder}(S_n), V)$$

Zeichnen Sie den Baum.