

26 Punkte

Aufgabe 1 Kreis-Algebra

In dieser Aufgabe sollen Sie eine Algebra zur Darstellung von Punkten und Kreisen in der Ebene erstellen. Dabei sollen auch Kreise mit einem Radius von 0 (Entartung zu einem Punkt) erlaubt sein. Die Algebra umfasst neben den notwendigen Sorten auch folgende Operationen:

createPoint: Erzeugt aus einem Koordinatenpaar einen Punkt.

distancePoint: Berechnet den euklidischen Abstand zwischen zwei Punkten.

createCircle: Erzeugt aus einem Punkt und einem Radius einen Kreis. Für Radien kleiner 0 wird ein Kreis mit Radius 0 erzeugt.

center: Ermittelt den Mittelpunkt eines Kreises.

radius: Liefert den Radius eines Kreises.

containsPoint: Prüft, ob ein Kreis einen bestimmten Punkt enthält oder der Punkt auf der Kreislinie liegt.

containsCircle: Prüft, ob ein Kreis einen anderen Kreis vollständig enthält.

intersectsCircle: Prüft, ob zwei Kreise sich schneiden, berühren oder enthalten.

equalCircles: Prüft, ob zwei Kreise identisch sind.

extendCircle: Vergrößert einen Kreis, so dass er den anderen Kreis gerade enthält, wobei der Mittelpunkt des ersten Kreises beibehalten wird. Ist der Kreis vorher schon enthalten, bleibt der Kreis unverändert.

minimumCircle: Gibt den kleinsten Kreis zurück, der zwei gegebene Punkte enthält.

distanceCircle: Berechnet den kleinsten euklidischen Abstand zwischen zwei Kreisen.

Formulieren Sie die Spezifikation aller erforderlichen Datentypen und Operationen als Algebra.

4 Punkte

(a) Geben Sie die Sorten und Operatorsignaturen der Algebra an.

5 Punkte

(b) Geben Sie Trägermengen für die eingeführten Sorten an, die genau die geforderten Objekte enthalten.

17 Punkte

(c) Geben Sie die Funktionen für die eingeführten Operationen mit der oben aufgeführten Semantik an.

Aufgabe 2 AVL-Baum**28 Punkte**

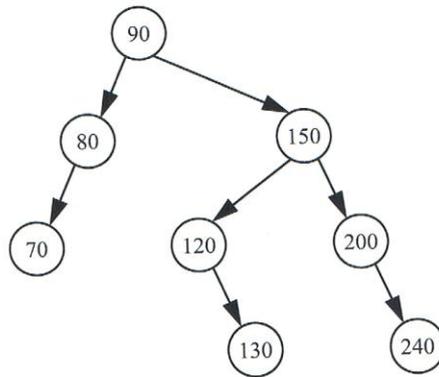
- (a) Fügen Sie in einen zunächst leeren AVL-Baum die nachstehenden Elemente in der gegebenen Reihenfolge ein. Zeichnen Sie den Baum vor und nach jeder Rebalancierung. Markieren Sie jeweils den Knoten, der aus der Balance geraten ist.

9 Punkte

100, 80, 90, 110, 120, 95, 70, 60, 50

- (b) Löschen Sie aus dem folgenden AVL-Baum die Elemente 80, 70, 240 und 200 in der angegebenen Reihenfolge. Zeichnen Sie die Baum vor und nach jeder Rebalancierung und kennzeichnen Sie jeweils den aus der Balance geratenen Knoten.

7 Punkte



- (c) Geben Sie einen Algorithmus an, der die Elemente eines AVL-Baum in **absteigender** Reihenfolge ausgibt. Ihr Algorithmus darf keine zusätzlichen Datenstrukturen verwenden und muss in Linearzeit ($O(n)$, n = Anzahl der im Baum gespeicherten Elemente) arbeiten. Eine Begründung der Laufzeit ist nicht erforderlich.

5 Punkte

- (d) Geben Sie einen Algorithmus an, der alle in einem AVL-Baum gespeicherten Elemente, die in einem durch min und max gegebenen Bereich liegen, aufsteigend ausgibt. Ihr Algorithmus darf eine Laufzeit von $O(\log(n) + e)$ (n = Anzahl der im Baum gespeicherten Elemente, e = Anzahl der Elemente im Ergebnis) nicht übersteigen. Begründen Sie die Laufzeitschranke. Ein formaler Beweis ist nicht erforderlich.

7 Punkte

17 Punkte Aufgabe 3 Radixsort

- 10 Punkte (a) Sortieren Sie die unten angegebene Folge von Zeichenketten aufsteigend mittels Radixsort. Geben Sie dabei für jeden Durchlauf den Inhalt aller nicht-leeren Behälter an.
- Karl, Barbara, Egon, Katrin, Hein, Boris, Anton, Karla, Diana, Peter, Nora
- 2 Punkte (b) Angenommen, Sie wollen mittels Radixsort eine Menge von Strings mit einer minimalen Länge von l_{min} , einer durchschnittlichen Länge von l_{avg} und einer maximalen Länge von l_{max} sortieren. Wieviele Durchläufe benötigen Sie, um die Menge zu sortieren?
- 5 Punkte (c) Bleiben wir bei der Sortierung von Strings mittels Radixsort. Wie kann man Radixsort so verändern, dass jeder String s nur in $length(s)$ Durchläufen beachtet wird?

Aufgabe 4 Eisenbahn-Magnat**28 Punkte**

Durch eine Erbschaft sind Sie unerwartet zu einem bescheidenen Wohlstand gelangt. So konnten Sie Ihren Jugendtraum verwirklichen und haben Ihr Vermögen in eine Eisenbahngesellschaft investiert. Als Generaldirektor haben Sie beschlossen, sämtliche Planungsaufgaben zur Chefsache zu machen.

Glücklicherweise ist Ihr Streckennetz (noch) recht übersichtlich. Zudem sind alle Strecken zwischen Ihren Stationen richtungsgebunden, d.h. Züge können über ein Gleis nur in eine Richtung verkehren. Zwischen je zwei Bahnhöfen gibt es genau 0 (keine direkte Verbindung), 1 (hin oder her) oder 2 (hin und her) Gleise. Zwischen den Bahnhöfen gibt es keine Abzweigungen, an Bahnhöfen kann man dagegen ohne Zeitverzug auf jedes andere Gleis gelangen.

Entfernungen zwischen den Stationen werden in Ihrer Gesellschaft nicht in Kilometern, sondern in Minuten bemessen, denn auf jedem Gleis fahren alle Züge jeweils gleich schnell (Sie halten das für eine sehr kundenfreundliche Lösung).

Besonders stolz sind Sie darauf, dass sämtliche Gleise auch von Ihren Zügen benutzt werden:

Berg-und-Tal-Bahn:



Philipp-Reis-Bähnle:



Zuse-Express:



Ihre Expansionspläne sehen vor, dass Sie zukünftig zwar die Anzahl der Stationen erhöhen wollen, jede Station jedoch mit höchstens 5 Nachbarstationen verbunden werden soll (mehr Gleise wollen Sie sich nicht leisten).

- Zeichnen Sie Ihr Gesamt-Streckennetz samt Entfernungsinformationen. *4 Punkte*
- Für Ihre weitere Planung benötigen Sie eine Tabelle mit den Dauern der schnellsten theoretisch möglichen Verbindungen zwischen allen Stationen. Welchen im Kurs vorgestellten Algorithmus können Sie dazu auf welche Weise verwenden? *4 Punkte*
- Wie hoch ist die Laufzeitkomplexität Ihres Verfahrens aus (b) als Funktion von der Stationsanzahl n insgesamt (O-Notation)? Berücksichtigen Sie dabei die Struktur des Streckennetzes und Ihre Expansionsstrategie, um eine möglichst geringe Komplexität zu erhalten. *6 Punkte*
- Erstellen Sie den Tabellenauszug mit A als Ausgangsbahnhof. Stellen Sie die einzelnen Schritte Ihrer Berechnung nachvollziehbar dar (nicht notwendigerweise zeichnerisch). *14 Punkte*

1 Punkt Aufgabe 5 Deckblatt

Lesen Sie sich die „Hinweise zur Bearbeitung“ sorgfältig durch. Füllen Sie den dort aufgeführten Anweisungen entsprechend beide Deckblätter vollständig und korrekt aus.