Aufgabe 1 Algebra für Bilder

(a)

algebra *picture*

sorts *card*, *color*, *picture*

ops

createPicture	: *card* × *card*	→ *picture*
insert	: *picture* × *picture* × *card* × *card*	→ *picture*
rotate	: *picture*	→ *picture*
height	: *picture*	→ *card*
width	: *picture*	→ *card*
getColor	: *picture* × *card* × *card*	→ *color*
setColor	: *picture* × *color* × *card* × *card*	→ *picture*
mirror	: *picture*	→ *picture*
cut	: *picture* × *card* × *card* × *card* × *card*	→ *picture*

(b)

sets $card = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 1 \} \cup \{\bot\}$

$color = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \} \cup \{\bot\}$

$picture = \{ (b, h , c_{11} \ldots c_{b1}\, c_{12} \ldots c_{bh}) \mid b, h \in card, c_{ij} \in color, 1 \leq i \leq b, 1 \leq j \leq h \}$

$\cup \{\bot\}$

functions

$$createPicture(b,h) = \begin{cases} \bot & \text{falls } b = \bot \vee h = \bot \\ (b,h,(1,1,1)\ldots(1,1,1)) & \text{sonst} \end{cases}$$

$height(\ (b, h, c_{11} \ldots c_{bh})) = h$

$height(\bot) = \bot$

$width(\ (b, h, c_{11} \ldots c_{bh})) = b$

$width(\bot) = \bot$

$$getColor((b,h,c_{11}\ldots c_{bh}),x,y) = \begin{cases} c_{xy} & \text{wenn } 1 \leq x \leq b \wedge 1 \leq y \leq h \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

$getColor(\bot, x, y) = \bot$

$$setColor((b,h,c_{11}\ldots c_{bh}),x,y,c) = \begin{cases} (b,h,c^{\bullet}_{11}\ldots c^{\bullet}_{bh}) & \text{falls } x \neq \bot \wedge y \neq \bot \wedge c \neq \bot \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{mit } c^{\bullet}_{ij} = \begin{cases} c & \text{falls } i = x \wedge j = y \\ c_{ij} & \text{sonst} \end{cases}$$

$setColor(\bot, x, y, c) = \bot$

$mirror((b,h,c_{11}\ldots c_{bh})) = (b,h,c^{\bullet}_{11}\ldots c^{\bullet}_{bh})$

$\text{mit } c^{\bullet}_{ij} = c_{(b-i+1)j}$

$mirror(\perp) = \perp$

$rotate((b,h,c_{11}...c_{bh})) = (h,b,c^{\bullet}_{11}...c^{\bullet}_{hb})$

mit $c^{\bullet}_{ij} = c_{(b-j+1)i}$

$rotate(\perp) = \perp$

$$cut((b,h,c_{11}...c_{bh}),x_1,y_1,x_2,y_2) = \begin{cases}(b',h',c^{\bullet}_{11}...c^{\bullet}_{b'h'}) & \text{falls } b' \geq 1 \wedge h' \geq 1 \wedge x_i \neq \perp \wedge y_i \neq \perp \\ \perp & \text{sonst}\end{cases}$$

$b' = \min(b - x_1, x_2 - x_1) + 1$

$h' = \min(h - y_1, y_2 - y_1) + 1$

$c^{\bullet}_{ij} = c_{(i+x_1-1)(j+y_1-1)} 1 \leq i \leq b', 1 \leq j \leq h'$

$cut(\perp, x_1, y_1, x_2, y_2) = \perp$

$$insert((b_1,h_1,c_{11}...c_{b_1h_1}),(b_2,h_2,d_{11}...d_{b_2h_2}),x,y) = \begin{cases}(b_1,h_1,e_{11}...e_{b_1h_1}) & \text{falls } x \neq \perp \wedge y \neq \perp \\ \perp & \textit{sonst}\end{cases}$$

$$\text{mit } e_{ij} = \begin{cases}d_{(i-x+1)(j-y+1)} & \text{wenn } x \leq i < x + b_2 \wedge y \leq j < y + h_2 \\ c_{ij} & \text{sonst}\end{cases}$$

$insert(\perp, p, x, y) = \perp$
$insert(p, \perp, x, y) = \perp$

(c)
$width(P) = height(rotate(P))$
$width(cut(P, x_1, y_1, x_2, y_2)) \in \{width(P), \perp\}$

$$getColor(createPicture(b,h),x,y) = \begin{cases}(1,1,1) & \text{falls } 1 \leq x \leq b \wedge 1 \leq y \leq h \\ \perp & \text{sonst}\end{cases}$$

$getColor(mirror(P), x, y) = getColor(P, width(P) - x + 1, y)$
$getColor(insert(P_1, P_2, x, y), x, y) \in \{getColor(P_2, 1, 1), \perp\}$

Aufgabe 2 Hashing

(a)

Bei einer Tabellengröße von m=10, besteht der mittlere auszuschneidende Block nur aus einer einzelnen Ziffer. Als mittleres Element wurde hier dasjenige gewählt, welches rechts der „tatsächlichen Mitte" der Ziffernfolge von k^2 liegt. Die Auswahl des links davon liegenden Elements ist natürlich genauso richtig. Die Zahlen werden auf die folgenden Behälternummern abgebildet:

k	k^2	$h(k)$	$h_1(k)$	$h_2(k)$	$h_3(k)$	$h_4(k)$	$h_5(k)$
120	14400	4					
163	26569	5					
19	361	6					
84	7056	5	6	9			

69	4761	6	7				
67	4489	8					
175	30625	6	7	0			
59	3481	8	9	2			
13	169	6	7	0	5	2	1

Der Inhalt der Tabelle nach Einfügen aller Zahlen ist:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
175	13	59		120	163	19	69	67	84

Aufgabe 3

(a)

Da die Zeitstempel aus 3 Komponenten bestehen, benötigt Radixsort 3 Phasen. In der ersten Phase wird nach Sekunden zur Basis 60, in der zweiten Phase nach Minuten zur Basis 60 und in der letzten Phase nach Stunden zur Basis 24 sortiert. In den folgenden Tabellen werden leere Behälter nicht angegeben.

Phase 1:

B_1	B_3	B_{14}	B_{59}
23:59:01 12:11:01 03:27:01 13:28:01	12:11:03	13:31:14 17:23:14	17:15:59

Die Ausgabe der ersten Phase dient als Eingabe für die zweite Phase, deren Ausgabe in der folgenden Tabelle dargestellt ist.

B_{11}	B_{15}	B_{23}	B_{27}	B_{28}	B_{31}	B_{59}
12:11:01 12:11:03	17:15:59	17:23:14	03:27:01	13:28:01	13:31:14	23:59:01

Nach der dritten Phase zeigt sich folgende Behälterkonfiguration:

B_3	B_{12}	B_{13}	B_{17}	B_{23}
03:27:01	12:11:01 12:11:03	13:28:01 13:31:14	17:15:59 17:23:14	23:59:01

Als Ergebnisfolge wird

03:27:01, 12:11:01, 12:11:03, 13:28:01, 13:31:14, 17:15:59, 17:23:14, 23:59:01

ausgegeben.

(b)

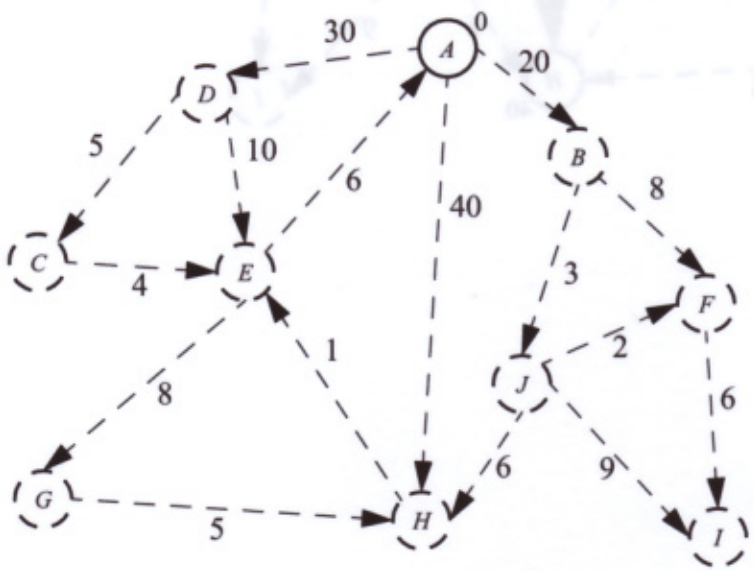
Radixsort müßte zur Basis m=10 k=100 Phasen durchlaufen, also insgesamt 100 mal 1000 Zahlen auf Buckets verteilen. Wählt man als Basis m=100 so ist k=50, also müßten 50.000 Zahlen auf Buckets verteilt werden. Der minimale Wert würde für m=1000 und k=34 erreicht; dabei müßten insgesamt nur 34.000 Zahlen auf Buckets verteilt werden.

Heapsort benötigt dagegen weniger als $2 \cdot n \cdot \log n + n$ Vergleiche also ungefähr $2 \cdot 9{,}96 \cdot 1000 + 1000 \leq 21.000$ Vergleiche. Wenn die Kosten für den Vergleich zweier Zahlen und das Vertauschen im Array in etwa den Kosten für das Verteilen auf Buckets entsprechen, wäre Heapsort vorzuziehen.

Aufgabe 4 (Bestimmung kürzester Wege)

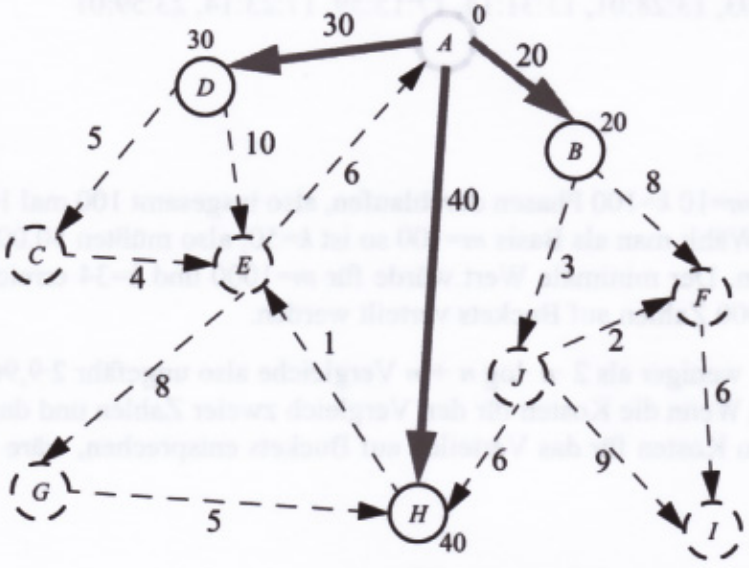
Wir verwenden folgende Notation:

Im initialen Schritt wird Knoten A gelb gefärbt und $dist(A)$ auf 0 gesetzt. Alle anderen Knoten und Kanten sind ungefärbt. Wir markieren jeden Knoten zusätzlich mit seiner aktuellen kürzesten Distanz:

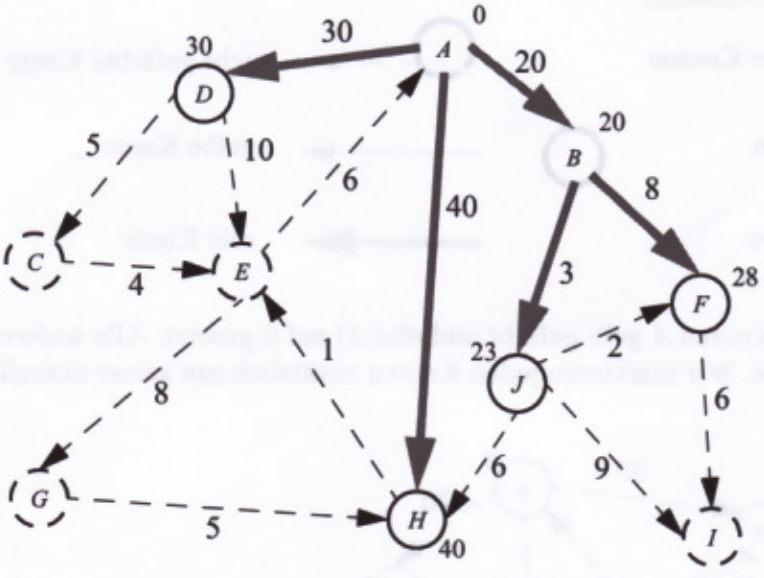


also insgesamt 100
k=50, also müßten
n=1000 und k=34

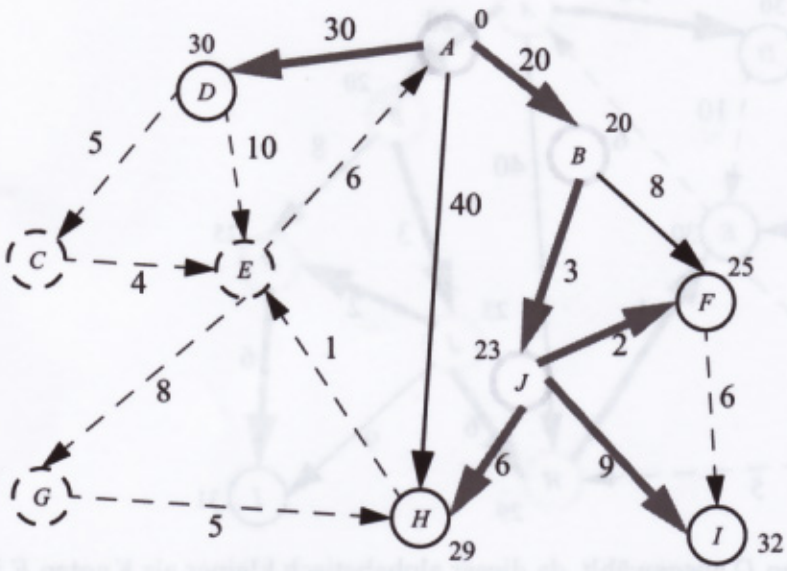
Wir wählen Knoten *A*, färben die Kanten zu seinen Nachfolgern auf rot und färben die Nachfolger gelb ein:



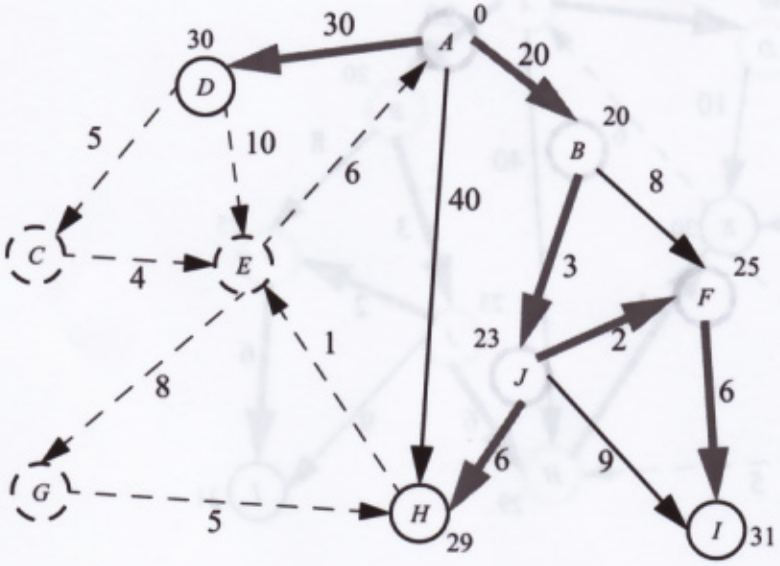
Als nächstes wird Knoten *B* grün gefärbt:



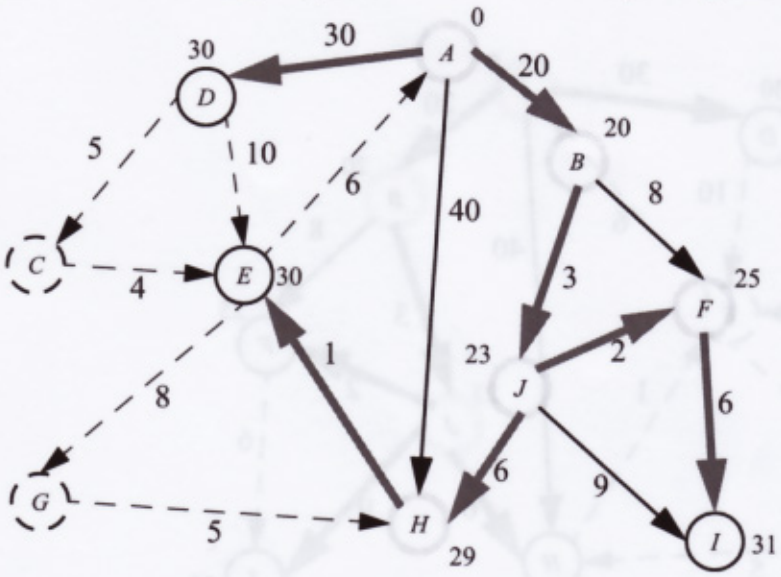
Nun wird Knoten *J* grün gefärbt. Dadurch ändern sich die bisherigen kürzesten Wege zu den Knoten *F* und *H*.



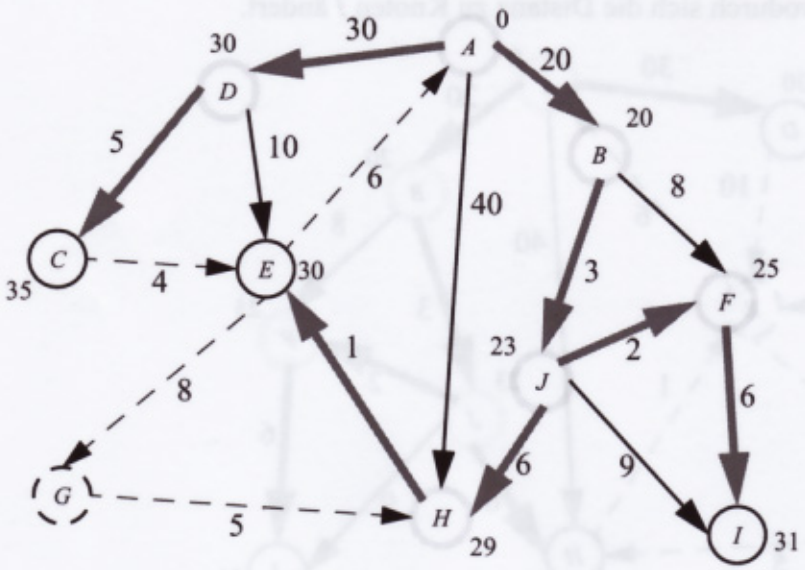
Wir wählen Knoten *F*, wodurch sich die Distanz zu Knoten *I* ändert.



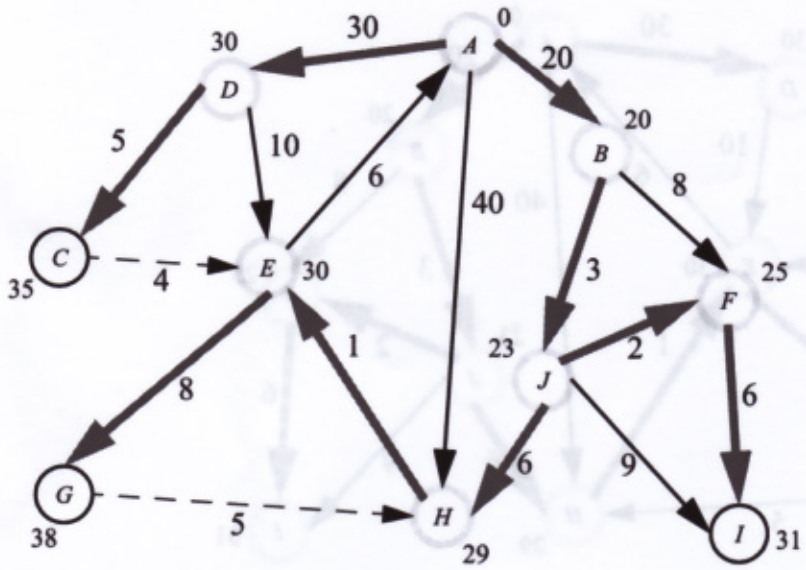
Als nächstes wird Knoten *H* grün gefärbt und *E* in die Menge der gelben Knoten aufgenommen.



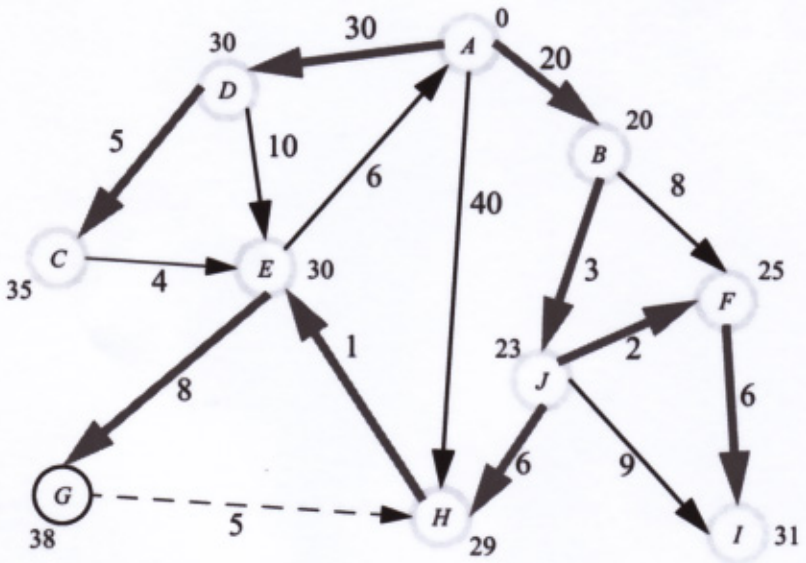
Als nächstes wird Knoten *D* ausgewählt, da dieser alphabetisch kleiner als Knoten *E* ist.



Nun wird Knoten *E* in die Menge der grünen Knoten aufgenommen.



Knoten *I* wird nun grün gefärbt, ohne daß sich Änderungen bei Kanten ergeben. Anschließend wird Knoten *C* gewählt.



Zum Schluß wird noch Knoten *G* grün gefärbt und der Algorithmus endet.