Lösungshinweise zur Klausur des Kurses „Grundlagen der Theoretischen Informatik B“ vom 1. August 2009

Hinweis: Die Aufgabenstellungen 1 (ii), 1. Zeile und 7 (a),(b) waren nicht wie in der gedruckten Form intendiert. Obwohl sie weiterhin lösbar sind, werden sie nicht bei den zum Bestehen der Klausur notwendigen Punkten gewertet, d.h. zum Bestehen dieser Klausur reichen 37 Punkte.

Aufgabe 1

(i) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

korrekt	falsch	
[ ]	[X]	$\forall k \in \mathbb{N}\ 2^{k^2 \cdot \log(n)} \in O(n^{2 \cdot k})$
[X]	[~~X~~]	Für alle $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt: Jede Sprache in ZEIT(f) ist entscheidbar.
[X]	[ ]	Für alle $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt: Es existiert eine entscheidbare Sprache in $ZEIT(f)$.
[ ]	[X]	Für alle Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt: ZEIT(f) $\subsetneqq$ ZEIT(g) $\Rightarrow$ g zeitkonstruierbar.
[ ]	[X]	Es ist bekannt, dass ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass BAND($\log n$) $\subsetneqq$ ZEIT(n^k).
[X]	[ ]	Die Funktion $f(n) = \left\lceil \sqrt[3]{n^5} \right\rceil$ ist zeitkonstruierbar.

(ii) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

korrekt	falsch	
[ ]	[ ]	Für alle $A \in$ NP gilt $A \in$ P. **Nicht bekannt.**
[X]	[ ]	Es ist bekannt, dass NLOGSPACE $\subsetneqq$ NP gilt.
[X]	[ ]	CLIQUE$\leq_{pol}$3SAT
[X]	[ ]	Es existiert eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so dass NP $\subsetneqq$ ZEIT(f).
[X]	[ ]	Aus $A \leq_{pol} B$ und $B \in$ NBAND(n^3) folgt $A \in$ PSPACE.
[X]	[ ]	Es ist bekannt, dass GAP$\leq_{pol}$3SAT.

(iii) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

korrekt	falsch	
[ ]	[X]	Die Sprache $\{ww^Rw \mid w \in \{0,1\}^*\}$ ist kontextfrei.
[ ]	[X]	Die Sprache $\{u1u^R \mid u \in \{0,1\}^*\}$ ist deterministisch kontextfrei.
[ ]	[X]	Sei $G = (\{S,T\}, \{a,b\}, \{S \to aSb \vert T \vert U\ ,\ T \to aT \vert a\ ,\ U \to bU \vert b\}, S)$. $L(G)$ ist regulär.
[X]	[ ]	Sei $G = (\{S,T\}, \{a,b\}, \{S \to aSb \vert T \vert U \vert \varepsilon\ ,\ T \to aT \vert a\ ,\ U \to bU \vert b\}, S)$. $L(G)$ ist regulär.
[X]	[ ]	Für zwei beliebige reguläre Mengen L_1 und L_2 ist entscheidbar, ob $L_1 \subseteq L_2$ gilt.
[X]	[ ]	Für beliebige kontextfreie Sprachen L gilt $L \in$ P.

Aufgabe 2

Wir geben im Folgenden die Nummern der Definitionen/Sätze im Kurstext an:

(a) (i) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist bandkonstruierbar — Definition 3.3.1.

(ii) $\mathrm{FBAND}_\Sigma(f)$ — Definition 2.4.1.

(iii) Die Sprache L_M einer Kontrollturingmaschine M — Definition 4.1.1.

(iv) NP-vollständige Sprache — Definition 4.3.5.

(v) Chomsky-Normalform — Definition 9.3.2.

(b) (i) Der Zusammenhang zwischen Zeit- und Band-Komplexitätsklassen — Satz 2.5.3.

(ii) Zeithierarchiesatz — Satz 3.4.2.

(iii) Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen — Satz 9.4.3.

Aufgabe 3

Sei L eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{N}$. Da $O(\log^k(n) + \mathrm{cf}_L(n)) = O(\log^k(n))$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $O(n\log(n) + \mathrm{cf}_L(n)) = O(n\log(n))$ folgt zunächst

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{BAND}(\log^k(n) + \mathrm{cf}_L(n)) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{BAND}(\log^k(n))$$

und

$$\mathrm{BAND}(n\log(n) + \mathrm{cf}_L(n)) = \mathrm{BAND}(n\log(n)).$$

Ferner gilt

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{BAND}(\log^k(n)) \subseteq \mathrm{BAND}(\log^{\log\log(n)}(n)) \subseteq \mathrm{BAND}(\sqrt{n}).$$

?

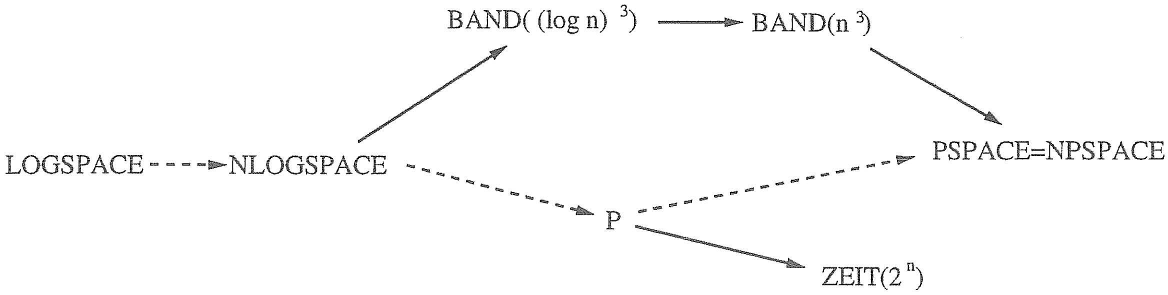
Es genügt also zu zeigen, dass

$$\mathrm{BAND}(\sqrt{n}) \subsetneqq \mathrm{BAND}(n) \subsetneqq \mathrm{BAND}(n \cdot \log(n)).$$

Da n und $n\log(n)$ bandkonstruierbar und $\sqrt{n} \in o(n)$, $n \in o(n\log(n))$ folgt diese Behauptung aus dem Bandhierarchiesatz.

Aufgabe 4

Im Folgenden sind die nicht-trivialen Inklusionen zwischen den angegebenen Komplexitätsklassen grafisch dargestellt. Die Pfeile bedeuten Inklusionen. Durchgezogene Pfeile bedeuten, dass die Echtheit der Inklusion bekannt ist. Ist die Inklusion mit einem gestrichelten Pfeil gekennzeichnet, so ist deren Echtheit nicht bekannt.



Nach dem Bandhierarchiesatz ist BAND$((\log(n))^3)$ echt enthalten in BAND(n^3) und BAND(n^3) echt enthalten in BAND(n^4) und somit in PSPACE. Nach dem Satz von Savitch gilt PSPACE=NPSPACE. Da jede deterministische Klasse in der korrespondierenden nichtdeterministischen Klasse enthalten ist gilt LOGSPACE$\subseteq$NLOGSPACE. Ferner ist jede Zeitkomplexitätsklasse in der korrespondierenden Bandkomplexitätsklasse enthalten, also P$\subseteq$PSPACE. Nach Satz 2.5.3 gilt NLOGSPACE$\subseteq$P. Aus dem Zeithierarchiesatz folgt ZEIT$(n^{\log(n)})$ $\subsetneq$ZEIT(2^n) und somit wegen P$\subseteq$ZEIT$(n^{\log(n)})$ auch P$\subsetneq$ZEIT(2^n).

Aufgabe 5

Es gibt NP-vollständige Sprachen in BAND$(\lceil\sqrt{n}\rceil)$.

Sei hierzu $L \subseteq \{0,1\}^*$ eine beliebige NP-vollständige Sprache. Insbesondere ist L in NP und somit in PSPACE enthalten. Seien $i, k \in \mathbb{N}$ und M eine i-Band, $O(n^k)$-bandbeschränkte Turingmaschine mit $L_M = L$. Dann gilt $L \leq_{pol} L'$ und $L' \leq_{pol} L$ für die Sprache

$$L' = \{w10^{\lg(w)^{2k}} \mid w \in L\}.$$

Insbesondere ist L' also NP-vollständig. Die folgende Maschine M' akzeptiert nun L':

a) Prüfe, ob die Eingabe von der Form $w10^{\lg(w)^{2k}}$ ist. Falls ja (2) sonst wird die Eingabe verworfen.

b) Kopiere w auf das $(i+1)$-te Arbeitsband.

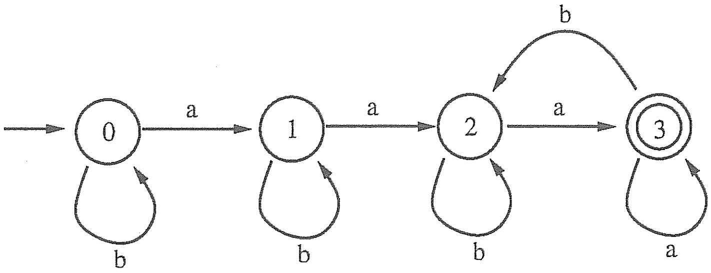
c) Simuliere M, wobei das Eingabeband durch das $(i+1)$-te Arbeitsband ersetzt wird.

Der Test in 1 kann auf Band $O(\log \lg(w)^{2k})$ ausgeführt werden. Schritte 2 und 3 benötigen Band $O(\lg)$ bzw. $O(\lg^k)$. Insgesamt erhält man also eine $O(\lceil\sqrt{n}\rceil)$-bandbeschränkte Turingmaschine.

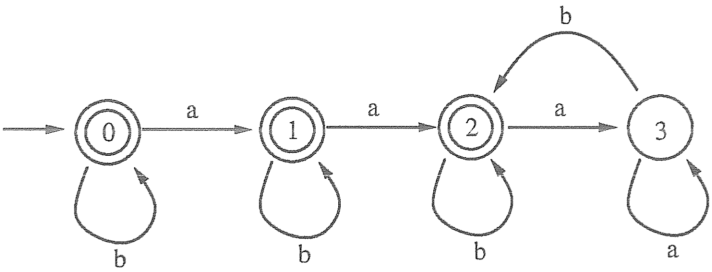
Aufgabe 6

Sei $L := \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ endet mit einem } a \text{ und } \#_a(w) \geq 3\}$.

a)



b)



c) Sei $G = (\Pi, \Sigma, R, S_0)$ mit $\Sigma = \{a,b\}$, $\Pi = \{S_0, S_1, S_2, S_3\}$ die durch die folgende Regelmenge R festgelegte Grammatik:

$$R = \{S_0 \to bS_0 \mid aS_1, S_1 \to bS_1 \mid aS_2, S_2 \to bS_2 \mid aS_3, S_3 \to bS_2 \mid aS_3 \mid \varepsilon\}.$$

d) Wir zeigen die Korrektheit der in Teil (c) angegebenen Grammatik G. Hierzu definieren wir zunächst die Hilfsfunktion $\phi : \Sigma^* \to \Pi$ durch

$$\phi(w) = S_{\sharp_a(w)} \text{ für alle } w \in \Sigma^* \text{ mit } \sharp_a(w) \leq 2$$

und

$$\phi(wb) = S_2, \phi(wa) = S_3 \text{ für alle } w \in \Sigma^* \text{ mit } \sharp_a(w) \geq 3.$$

Wir zeigen nun die folgende Aussage per Induktion nach $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}. \forall w \in (\Sigma \cup \Pi)^n \setminus \Sigma^*. (S_0 \xrightarrow{n} w \Leftrightarrow \exists v \in \Sigma^n. w = v\phi(v)).$$

$n = 0$: Es gilt

$$S_0 \xrightarrow{0} w \Leftrightarrow w = S_0 \Leftrightarrow \exists v \in \Sigma^0 . w = v\phi(v).$$

$n \rightsquigarrow n+1$: „$\Rightarrow$": Sei $w \in (\Sigma \cup \Pi)^* \setminus \Sigma^*$ mit $S_0 \xrightarrow{n+1} w$. Dann gibt es ein w' und nach Induktionsannahme ein $v' \in \Sigma^n$ mit $S_0 \xrightarrow{n} w' \to w$ und $w' = v'\phi(v')$. Somit kann w nur durch die Regel $\phi(v') \to a\phi(v'a)$ oder $\phi(v') \to b\phi(v'b)$ entstehen.
„$\Leftarrow$ ": Sei nun $w = v\phi(v)$ für ein $v \in \Sigma^{n+1}$. Dann ist $v = v'\alpha$ für ein $v' \in \Sigma^n$ und $\alpha \in \Sigma$. Nach Induktionsannahme gilt nun $S_0 \xrightarrow{n} v'\phi(v')$. Durch Anwenden der Regel $\phi(v') \to \alpha\phi(v'\alpha)$ sieht man $S \xrightarrow{n+1} v'\alpha\phi(v'\alpha)$.

Somit ist die obige Behauptung gezeigt. Die Korrektheit von G folgt nun direkt, da $L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid \phi(w) = S_3\} = L$.

Aufgabe 7

Gegeben sei die Sprache

$$L := \{xay \in \{a,b\}^* \mid lg(x) = lg(y) \wedge \#_b(x) = \#_a(y)\}.$$

a),b),c) Wir zeigen im Folgenden, dass L nicht kontextfrei ist, also weder die Grammatik noch der Kellerautomat existieren kann.

Wir nehmen hierzu an, dass L kontextfrei ist. Dann gilt nach dem Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen: Es existiert ein n so dass für alle $z \in L$ mit $\lg(z) \geq n$ eine Zerlegung $z = uvwxy$ mit $\lg(vwx) \leq n$, $vx \neq \varepsilon$ existiert mit $uv^iwx^iy \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Sei $z = a^{n+1}b^{n+1}ab^{n+1}a^{n+1}$. Dann gilt $z \in L$. Sei $z = uvwxy$ eine zugehörige Zerlegung. Falls $w \neq b^m ab^{m'}$ und $v \neq x$ oder $v \neq b^p$ für geeignete $m, m', p < n$, so kann uwy nicht in L enthalten sein, da das mittlere Zeichen von uwy kein a ist. Sei also $w = b^m ab^{m'}$ und $v = x = b^p$. Dann ist aber $uwy = a^{n+1}b^{n+1-p}ab^{n+1-p}a^{n+1}$ für geeignetes $1 \leq p < n$. Es gilt also auch in diesem Fall $uwy \notin L$. Widerspruch.

d) Dieser Teil folgt nun sofort aus obigem Beweis und der einfachen Tatsache, dass das Wort $z = a^{n+1}b^{n+1}ab^{n+1}a^{n+1}$ auch in $L \cap L^R$ enthalten ist und ferner $L \cap L^R \subseteq L$ gilt.