**01658 Grundlagen der Theoretischen Informatik B**
**Klausur vom 24. September 2016**

Es müssen Ihnen 7 Seiten Klausurtext vorliegen:

- das Deckblatt für Ihre Lösungen,
- eine Teilnahmebescheinigung zur Vorlage beim Finanzamt,
- diese Vorbemerkungen,
- 3 Seiten mit Aufgaben,
- eine Seite Anhang.

Prüfen Sie zunächst die Vollständigkeit Ihrer Klausurunterlagen.

Für die Bearbeitung der Klausuraufgaben haben Sie 2 Stunden Zeit. Alle Sätze aus dem Kurstext können ohne Beweis verwendet werden. Einen Leistungsnachweis zum Kurs 01658 erhalten Sie, wenn Sie in dieser Klausur mindestens 32 der möglichen 70 Punkte erreichen.

Die Benutzung von **Hilfsmitteln** (z. B. Kurstext) ist **nicht** gestattet!

Füllen Sie bitte zunächst das Deckblatt für Ihre Lösungen aus und, falls gewünscht, die Bescheinigung für das Finanzamt. Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Falls es sich um ein Fortsetzungsblatt zu einer Aufgabe handelt, geben Sie bitte zusätzlich die Nummer der Aufgabe an. Bei Abgabe Ihrer Lösungsblätter heften Sie diese bitte – beginnend mit dem Deckblatt und möglichst nach Aufgaben sortiert – zusammen.

Schreiben Sie Ihre Lösungen bitte **nicht mit Bleistift** auf!

Bei der Bearbeitung der Klausuraufgaben wünschen wir Ihnen viel Erfolg.

Wir senden Ihnen die korrigierten Klausuren so rasch wie möglich zurück.

Mit freundlichen Grüßen

IHRE KURSBETREUER

**Aufgabe 1** *(10 Punkte)*

Es sei $\nu_G$ die Standardnotation für gerichtete Graphen. Ein Weg $(v_1, \ldots, v_{n+1})$ in einem gerichteten Graphen $(V, E)$ heißt genau dann ein *Kreis,* wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gibt, so dass $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für alle $i$ mit $1 \leq i \leq n$ gilt, die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ paarweise verschieden sind und $v_{n+1} = v_1$ ist. Es sei dann

$$\text{DOUBLE-HC} := \left\{ x \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \mid \left[ \begin{array}{l} \nu_G(x) \text{ besitzt zwei Kreise mit} \\ \text{disjunkten Knotenmengen } V_1 \\ \text{und } V_2, \text{ so dass } V = V_1 \cup V_2 \end{array} \right] \right\}.$$

Beweisen Sie die NP-Schwere von DOUBLE-HC unter Verwendung derjenigen von HC.

**Aufgabe 2** *(10 Punkte)*

Beschreiben Sie die Idee für eine Kontroll-Turingmaschine $M$, die

$$\text{DOUBLE-HC} \in \mathbf{NP}$$

beweist.

**Aufgabe 3** *(8 Punkte)*

Sei $\Sigma := \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ ein Alphabet, und seien $A, B$ Teilmengen von $\Sigma^*$.
Welche der folgenden Aussagen treffen zu und welche sind unrichtig? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung an.
*(je 2 Punkte)*

1. „Wenn $A \leq_{pol} B$ und $B \in \mathsf{NP}$ gilt, so gilt $A \in \mathsf{NP}$."
2. „Wenn $A \leq_{pol} B$ und $A \in \mathsf{NP}$ gilt, so gilt $B \in \mathsf{NP}$."
3. „Wenn $A \leq_{pol} B$ gilt und $B$ NP–schwer ist, so ist $A$ NP–schwer."
4. „Wenn $A \leq_{pol} B$ gilt und $A$ NP–schwer ist, so ist $B$ NP–schwer."

## Aufgabe 4 *(10 Punkte)*

Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist $\mathsf{PRAEFIX}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \text{es gibt } w' \in \Sigma^* \text{ mit } ww' \in L\}$ die Menge aller Präfixe von $L$. Zeigen Sie, dass die regulären Sprachen unter Präfixbildung abgeschlossen sind, d.h. wenn $L$ regulär ist dann ist auch $\mathsf{PRAEFIX}(L)$ regulär.

## Aufgabe 5 *(14 Punkte)*

Es seien $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und $\Pi := \{\mathtt{S}\}$ Alphabete.

(a) *(6 Punkte)*

Geben Sie explizit die Regelmenge $R$ einer kontextfreien Grammatik $G = (\Pi, \Sigma, R, \mathtt{S})$ an, die die Sprache

$$L := \left\{\mathtt{a}^{n-1}\mathtt{b}^{n+1} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\right\} \subseteq \Sigma^*$$

erzeugt.

(b) *(8 Punkte)*

Beweisen Sie, dass die Sprache $L$ keine reguläre Sprache ist.

## Aufgabe 6 *(6 Punkte)*

Es seien $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und $\Pi := \{\mathtt{S}\}$ Alphabete. Die Regelmenge $R$ einer Grammatik $G = (\Pi, \Sigma, R, \mathtt{S})$ sei gegeben durch

$$\mathtt{S} \rightarrow \mathtt{bSaS} \mid \mathtt{aSbS} \mid \varepsilon.$$

(a) *(3 Punkte)*

Geben Sie einen Ableitungsbaum des Wortes `abaabb` an.

b) *(3 Punkte)*

Ist die Grammatik $G$ eindeutig?

**Aufgabe 7** *(12 Punkte)*
Seien $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und $L := \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ endet mit } \mathtt{ba} \text{ oder } \mathtt{ab}\}$.

1. *(6 Punkte)*
   Geben Sie graphisch einen nichtdeterminierten endlichen Automaten $A$ an, der vier Zustände hat und für den $L(A) = L$ gilt.

2. *(6 Punkte)*
   Konstruieren Sie mit dem aus dem Kurs angegebenen Verfahren den vereinfachten Potenzautomaten zu $A$ und geben Sie ihn graphisch an.

Korrektheitsbeweise sind nicht erforderlich.

## Anhang

**Notation für gerichtete Graphen:** Die Knotenmenge $V$ wird zu $\{1, \ldots, n\}$ mit $n = \#V$ normiert. Dann lässt sich $G = (V, E)$ durch die Adjazenzmatrix $A_G$ beschreiben. $A_G$ ist eine $n \times n$-Matrix mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \in E, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Matrix lässt sich zeilenweise als $a_{11} \ldots a_{1n} a_{21} \ldots a_{nn} \in \{0,1\}^{n^2}$ notieren. Wir erhalten also die folgende Standardnotation für gerichtete Graphen $(V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, \#V\}$:

$$\nu_G(a_1 \ldots a_m) = (V, E) \text{ mit } V = \{1, \ldots, \lfloor\sqrt{m}\rfloor\},\ (i,j) \in E \Leftrightarrow a_{(i-1)\lfloor\sqrt{m}\rfloor + j} = 1.$$

**Hamiltonkreis-Problem (HC)**

Gegeben ist ein gerichteter Graph $G = (V, E)$. Gesucht ist ein Hamiltonkreis in $G$. Das ist ein geschlossener Weg der Länge $n = \#V$, der jeden Knoten genau einmal durchläuft.

Kurz:

$$\mathrm{HC} := \{x \in \{0,1\}^* \mid \nu_G(x) \text{ besitzt einen Hamiltonkreis}\}.$$

**Satz 8.4.3** *(Pumping-Lemma für reguläre Mengen)*

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann gilt:

Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, sodass für alle $t, \bar{t}, z \in \Sigma^*$ mit $tz\bar{t} \in L$ und $\lg(z) = n$ gilt:

$$\exists\, u, v, w \in \Sigma^*.\ \big(z = uvw \land v \neq \varepsilon \land \forall i \geq 0.\ tuv^i w\bar{t} \in L\big).$$