Aufgabe 1 *(9 Punkte)*

Welche der folgenden Aussagen über Komplexitätsklassen treffen zu und welche sind falsch? – Geben Sie jeweils eine kurze Begründung an.

(a) *(2 Punkte)*
$\mathsf{FZEIT}\,(n \cdot \log n) \subseteq \mathsf{FBAND}\,(n \cdot \log n)\,.$

(b) *(2 Punkte)*
$\mathsf{FBAND}\,(n^2) \subseteq \mathsf{BAND}\,((n^2)^2)\,.$

(c) *(2 Punkte)*
$\mathsf{FZEIT}\,(n^3) \subseteq O(n^3).$

(d) *(3 Punkte)*
$\mathsf{BAND}\,(\log n) \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathsf{ZEIT}\left(n^k\right).$

Aufgabe 2 *(16 Punkte)*

(a) *(6 Punkte)*
Beweisen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiert durch

$$f(n) := (\log n)^2 \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

bandkonstruierbar ist, indem Sie

(1) *(5 Punkte)*
die Arbeitsweise einer geeigneten Turingmaschine beschreiben und

(2) *(1 Punkte)*
eine entsprechende Bandbedarfsabschätzung vornehmen.

(b) *(5 Punkte)*
Zeigen Sie: $(\log n)^2 \notin O\,(\log n)$.

(c) *(5 Punkte)*
Gibt es eine Sprache $L \in \mathsf{BAND}\,((\log n)^2)$, die nicht in $\mathsf{BAND}\,(\log n)$ liegt? – Beweisen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3 *(12 Punkte)*

Es sei im Folgenden Σ ein Alphabet, und $L, M \subseteq \Sigma^*$ seien Sprachen. Welche der folgenden Behauptungen sind richtig und welche falsch?

(Bei dieser Aufgabe erhalten Sie für jede richtige Antwort (entweder „richtig“ oder „falsch“) einen Punkt. Für eine falsche Antwort wird Ihnen dagegen ein Punkt abgezogen. Nicht beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet. Insgesamt kann je Block keine negative Punktzahl erzielt werden. Ihre Antworten brauchen Sie nicht zu begründen.)

1. (a) Genau dann ist L polynomiell reduzierbar auf M ($L \leq_{pol} M$), wenn es eine Funktion $f \in \mathsf{FP}$ gibt, die genau die Elemente aus L in M abbildet.
   (b) Ist L NP-hart und nicht in NP, dann ist L nicht NP-vollständig.
   (c) Wenn $L \leq_{log} M$ und $M \in \mathsf{NP}$ gilt, dann ist $L \in \mathsf{NP}$.
   (d) Die Komplexitätsklasse $\mathsf{NBAND}(f)$ ist nur für berechenbare Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert.
   (e) Die Komplexitätsklasse NP ist die Vereinigung aller $\mathsf{NZEIT}(f)$, wobei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion mit $f \in O\left(n^k\right)$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ist.
   (f) Die nur aus dem leeren Wort bestehende Menge $M = \{\varepsilon\}$ ist kein Element von NP.

2. (a) Es gibt eine Kontrollturingmaschine, die keine nichtdeterministische Turingmaschine ist.
   (b) Für jedes $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ besteht $\mathsf{NZEIT}(f)$ nur aus entscheidbaren Mengen.
   (c) Für jedes $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ besteht $\mathsf{NBAND}(f)$ nur aus rekursiv-aufzählbaren Mengen.
   (d) $\mathsf{LOGSPACE} \neq \mathsf{NPSPACE}$.
   (e) Die Komplexitätsklasse P ist polynomiell reduzierbar auf das Problem 3-SAT.
   (f) $\mathsf{PSPACE} \neq \mathsf{NPSPACE}$.

Aufgabe 4 *(19 Punkte)*

Im Folgenden bezeichne $d(k)$ die Dualzahldarstellung der natürlichen Zahl $k \in \mathbb{N}$. – Es sei HALBER-RUCKSACK die folgende Menge:

$$\begin{aligned}\{d(N)\#d(k_1)\ldots\#d(k_n) \mid \ & n \geq 1,\ N, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N},\ N \text{ gerade},\\ & \exists\, M \subseteq \{1, \ldots, n\}.\ \textstyle\sum_{i \in M} k_i = \frac{N}{2}\}.\end{aligned}$$

(a) *(8 Punkte)*

Zeigen Sie HALBER-RUCKSACK $\in$ NP, indem Sie die Arbeitsweise einer geeigneten Kontrollturingmaschine beschreiben und eine Zeitbedarfsabschätzung vornehmen.

(b) *(11 Punkte)*

Beweisen Sie die NP-Vollständigkeit von HALBER-RUCKSACK unter Verwendung derjenigen von RUCKSACK (s. Anhang).

Aufgabe 5 *(20 Punkte)*

Es seien $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und $\Pi := \{\mathtt{S}\}$ Alphabete, und $\Delta := \Sigma \cup \Pi$. Die Regelmenge einer Grammatik $G = (\Pi, \Sigma, R, \mathtt{S})$ sei gegeben durch

$$\mathtt{S} \to \mathtt{abSb} \mid \mathtt{a}\,.$$

Ferner sei

$$L := \{\mathtt{a}\} \cup \left\{(\mathtt{ab})^{n+2}\mathtt{b}^n \mid n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \Sigma^*.$$

(a) *(7 Punkte)*

Zeigen Sie durch vollständige Induktion über n, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $w \in \Delta^*$ Folgendes gilt: Wenn $\mathtt{S} \xrightarrow{n} w$, dann trifft einer der nachstehenden Fälle zu:

(1) $w = \mathtt{a}$

(2) $n \geq 2$ und $w = (\mathtt{ab})^n\mathtt{b}^{n-2}$

(3) $w = (\mathtt{ab})^n\mathtt{S}\mathtt{b}^n$.

(b) *(2 Punkte)*

Folgern Sie daraus, dass $L(G) \subseteq L$ gilt.

(c) *(9 Punkte)*

Zeigen Sie, dass L nicht regulär ist.

(d) *(2 Punkte)*

Ist L kontextfrei? – Geben Sie eine informale Begründung für Ihre Antwort!

Aufgabe 6 *(7 Punkte)*

Gegeben sei eine rechtslineare Grammatik $G = (\{\mathtt{S}, \mathtt{T}, \mathtt{U}\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, R, \mathtt{S})$ mit der Regelmenge

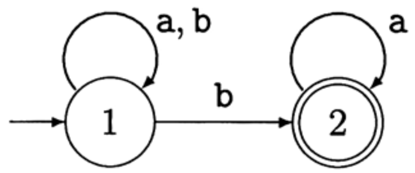
$$\begin{aligned} \mathtt{S} &\to \mathtt{aaS} \mid \mathtt{aT} \\ \mathtt{T} &\to \mathtt{bbT} \mid \mathtt{U} \\ \mathtt{U} &\to \mathtt{a} \end{aligned}$$

(a) *(3 Punkte)*
Geben Sie die von G erzeugte Sprache $L(G)$ so an, wie L in Aufgabe 5 gegeben ist, also $L(G) = \{\cdots \mid \cdots\}$.

(b) *(4 Punkte)*
Konstruieren Sie nach dem Verfahren aus dem Kurstext zu G eine rechtslineare Normalformgrammatik G' mit $L(G') = L(G)$.

Aufgabe 7 *(7 Punkte)*

Durch die folgende graphische Darstellung sei ein endlicher Automat A über dem Alphabet $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ gegeben:



(a) *(4 Punkte)*
Geben Sie eine rechtslineare Normalformgrammatik G mit $L(G) = L(A)$ an. (Ein Korrektheitsbeweis ist nicht erforderlich.)

(b) *(3 Punkte)*
Konstruieren Sie nach dem Verfahren aus dem Kurstext einen determinierten endlichen Automaten B mit $L(B) = L(A)$. Geben Sie B graphisch an.

Aufgabe 8 *(10 Punkte)*

Welche der folgenden Behauptungen sind richtig und welche falsch?

(Wie bei Aufgabe 3 erhalten Sie auch bei dieser Aufgabe für jede richtige Antwort (entweder „richtig“ oder „falsch“) einen Punkt. Für eine falsche Antwort wird Ihnen dagegen ein Punkt abgezogen. Nicht beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet. Insgesamt kann je Block keine negative Punktzahl erzielt werden. Ihre Antworten brauchen Sie nicht zu begründen.)

1. (a) Zu jeder kontextfreien Grammatik G gibt es eine Grammatik G' in Chomsky-Normalform, so dass $L(G) = L(G')$ gilt.
   (b) Genau dann gibt es zu einer Sprache L ein $p \in \mathbb{N}$, so dass man jedes Wort $z \in L$ mit $\lg(z) \geq p$ so in Teilworte u, v, w, x, y zerlegen kann, dass (1) $z = uvwxy$, (2) $vx \neq \varepsilon$, (3) $\lg(vwx) \leq p$ und (4) $\forall i \geq 0.\, uv^iwx^iy \in L$ gilt, wenn L kontextfrei ist.
   (c) Jede Typ-2-Sprache ist auch eine Typ-3-Sprache.
   (d) Die Typ-3-Sprachen bilden eine echte Oberklasse der Typ-2-Sprachen.
   (e) Jede Typ-1-Sprache ist deterministisch kontextfrei.

2. (a) Die deterministisch kontextfreien Sprachen sind unter Komplementbildung abgeschlossen.
   (b) Die Vereinigung und der Durchschnitt zweier kontextfreier Sprachen sind wiederum kontextfrei.
   (c) Die Vereinigung und der Durchschnitt zweier deterministisch kontextfreier Sprachen sind wiederum deterministisch kontextfrei.
   (d) Das Wortproblem für deterministisch kontextfreie Sprachen ist entscheidbar.
   (e) Das Äquivalenzsproblem für kontextfreie Sprachen ist unentscheidbar.

Anhang

Definition 3.3.1 *(bandkonstruierbar)*
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt *bandkonstruierbar,* falls es eine TM M gibt, so dass

1. $\forall n.\ f_M(0^n) = 0^{f(n)}$ und
2. $\tilde{s}_M \in O(f)$ gilt.

Satz 3.4.5 *(Bandhierarchiesatz)*
Sei $\log \in O(g)$, g bandkonstruierbar, $f \in O(g)$, $g \notin O(f)$. Dann ist

$$\mathsf{BAND}(f) \subsetneq \mathsf{BAND}(g).$$

Definition. Es ist RUCKSACK die folgende Menge:

$$\{d(N)\#d(k_1)\# \cdots \#d(k_n) \mid \begin{array}{l} n \geq 1,\ N, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}, \\ \exists\, M \subseteq \{1, \ldots, n\} \,.\, \sum_{i \in M} k_i = N\}. \end{array}$$

Definition 8.2.5 *(Normalform für rechtslineare Grammatiken)*
Sei $G = (\Pi, \Sigma, R, S)$ eine rechtslineare Grammatik. G ist eine *rechtslineare Normalformgrammatik* gdw. $R \subseteq \Pi \times (\{\varepsilon\} \cup \Sigma \cdot \Pi)$.

Satz 8.4.3 *(Pumping-Lemma für reguläre Mengen)*
Sei $L \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $t, \bar{t}, z \in \Sigma^*$ mit $tz\bar{t} \in L$ und $\lg(z) = n$ gilt:

$$\exists u, v, w \in \Sigma^* \,.\, (z = uvw \ \text{ und } \ v \neq \varepsilon \ \text{ und } \ \forall i \geq 0 \,.\, tuv^iw\bar{t} \in L).$$