01657 Grundlagen der Theoretischen Informatik A
Klausur vom 28. März 2015

Es müssen Ihnen 8 Seiten Klausurtext vorliegen:

- das Deckblatt für Ihre Lösungen,
- eine Teilnahmebescheinigung zur Vorlage beim Finanzamt,
- diese Vorbemerkungen,
- 3 Blätter mit 7 Aufgaben,
- 2 Seiten Anhang.

Prüfen Sie zunächst die Vollständigkeit Ihrer Klausurunterlagen.

Für die Bearbeitung der Klausuraufgaben haben Sie 2 Stunden Zeit. Einen Leistungsnachweis zum Kurs 01657 erhalten Sie, wenn Sie in dieser Klausur mindestens 26 der möglichen 65 Punkte erreichen.

Die Benutzung von **Hilfsmitteln** (z. B. Kurstext) ist **nicht** gestattet!

Füllen Sie bitte zunächst das Deckblatt für Ihre Lösungen aus und, falls gewünscht, die Bescheinigung für das Finanzamt. Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Falls es sich um ein Fortsetzungsblatt zu einer Aufgabe handelt, geben Sie bitte zusätzlich die Nummer der Aufgabe an. Bei Abgabe Ihrer Lösungsblätter heften Sie diese bitte – beginnend mit dem Deckblatt und möglichst nach Aufgaben sortiert – zusammen.

Schreiben Sie Ihre Lösungen bitte **nicht mit Bleistift** auf!

Bei der Bearbeitung der Klausuraufgaben wünschen wir Ihnen viel Erfolg.

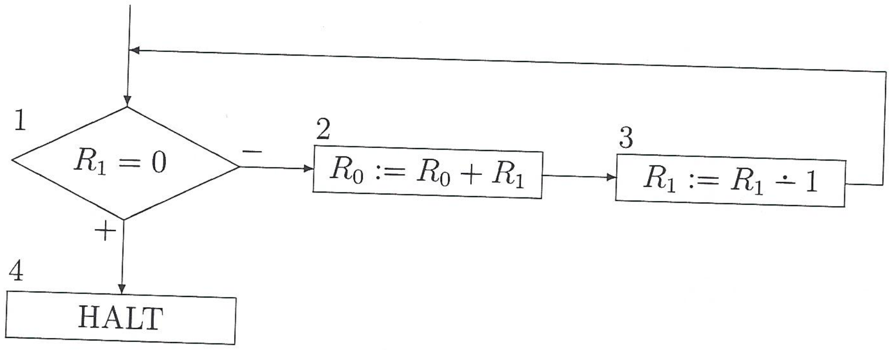
Wir senden Ihnen die korrigierten Klausuren so rasch wie möglich zurück.

Mit freundlichen Grüßen

IHRE KURSBETREUER

Aufgabe 1 *(10 Punkte)*

Das Flussdiagramm F einer einstelligen verallgemeinerten Registermaschine M sei wie folgt graphisch gegeben:



(a) *(1 Punkte)*

Welche der folgenden Behauptungen über F treffen zu und welche ggf. nicht?

(1) $(\forall x)(\forall n)\, \mathrm{ES}^{3\cdot n}(1, (0, x, 0, \ldots)) = \big(1, (\sum_{i=x+1-n}^{x} i, x \dot{-} n, 0, \ldots)\big).$

(2) $(\forall n)(\forall x)\, \big(x \geq n \Rightarrow \mathrm{ES}^{3\cdot n}(1, (0, x, 0, \ldots)) = \big(1, (\sum_{i=x+1-n}^{x} i, x \dot{-} n, 0, \ldots)\big)\big).$

(3) $(\forall x)\, \mathrm{ES}^{3\cdot x}(1, (0, x, 0, \ldots)) = (1, (\sum_{i=1}^{x} i, 0, 0, \ldots)).$

Beachten Sie, dass $\sum_{i=j}^{k} a_i$ für den Fall $j > k$ definitionsgemäß gleich null ist.

(b) *(7 Punkte)*

Beweisen Sie eine der korrekten Behauptungen aus (a) durch vollständige Induktion.

(c) *(2 Punkte)*

Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass $f_M(x) = \sum_{i=1}^{x} i$ für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 2 *(9 Punkte)*

Es sei $\Sigma := \{\mathsf{a}\}$ ein einelementiges Alphabet. Ferner sei die Funktion $g : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ definiert durch

$$g(v, w) := vw \text{ für alle } v, w \in \Sigma^*.$$

Zeigen Sie unter Verwendung einer geeigneten Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und des Satzes über den Zusammenhang zwischen Zahlen- und Wortberechenbarkeit (s. Anhang), dass g berechenbar ist.

Aufgabe 3 *(9 Punkte)*

Es sei $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(x, 0) := 1 \text{ und } f(x, y+1) := (x + y + 1) \cdot f(x, y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass f primitiv-rekursiv ist. (Dabei dürfen Sie die im Anhang angegebenen primitiv-rekursiven Funktionen benutzen.)

Aufgabe 4 *(9 Punkte)*

Zeigen Sie, dass es zu jeder berechenbaren Funktion $g :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine totale berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$\varphi_{f(i)}(n) = g(i) \text{ für alle } i, n \in \mathbb{N}$$

gibt.

Aufgabe 5 *(9 Punkte)*

Zeigen Sie mit Hilfe des Resultats aus Aufgabe 4, dass sich jede rekursiv-aufzählbare Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ auf K_φ reduzieren lässt: $A \leq K_\varphi$.

Aufgabe 6 *(11 Punkte)*

Beweisen Sie mittels Diagonalisierung, dass die Menge

$$B := \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i(i) = i\}$$

nicht rekursiv ist.

Aufgabe 7 *(8 Punkte)*

Es sei $\nu_{\mathbb{Z}}$ die Standardnummerierung von $\mathbb{Z}$. Eine Funktion $\nu :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$\nu(n) := \begin{cases} 1 + \nu_{\mathbb{Z}}(n) & \text{falls } \nu_{\mathbb{Z}}(n) \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweisen Sie:

(a) *(2 Punkte)*

ν ist eine Nummerierung von $\mathbb{N}$.

(b) *(6 Punkte)*

ν ist reduzierbar auf die Identitätsfunktion $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$; in Zeichen: $\nu \leq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

Anhang

Satz 6.1.6 (Auszug)
Es sei Σ ein Alphabet, es sei $\nu_\Sigma : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ eine Standardnummerierung von Σ^*, und es sei $k \in \mathbb{N}$. Es sei $g :\subseteq (\Sigma^*)^k \to \Sigma^*$. Dann gilt:

$$g \text{ berechenbar} \iff \nu_\Sigma^{-1} {}_\Sigma g \vec{\nu}_\Sigma :\subseteq \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \text{ berechenbar.}$$

Definition (primitive Rekursion)

- Für Funktionen $g :\subseteq \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ und $h_1, \ldots, h_m :\subseteq \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sei die Substitution $\mathrm{Sub}(g, h_1, \ldots, h_m) :\subseteq \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definiert durch

  $$\mathrm{Sub}(g, h_1, \ldots, h_m)(\bar{x}) := g(h_1(\bar{x}), \ldots, h_m(\bar{x}))$$

  für alle $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$.

- Es seien $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$. Die durch die beiden Gleichungen

  $$\begin{aligned} f(\bar{x}, 0) &= g(\bar{x}) \\ f(\bar{x}, y+1) &= h(\bar{x}, y, f(\bar{x}, y)) \end{aligned}$$

  (für alle $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$ und $y \in \mathbb{N}$) eindeutig bestimmte Funktion $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ wird mit $\mathrm{Prk}(g, h)$ bezeichnet. Man sagt: f entsteht aus g und h durch *primitive Rekursion*.

Definition (primitiv-rekursive Funktionen)

Wir nennen

$$\mathrm{Gr} := \{\tilde{0}, Z, S\} \cup \{\mathrm{pr}_i^{(k)} \mid i, k \in \mathbb{N}, 1 \le i \le k\}$$

die Menge der *primitiv-rekursiven Grundfunktionen*.

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ heißt *primitiv-rekursiv*, gdw. wenn sie sich in endlich vielen Schritten aus der Menge Gr durch wiederholtes Anwenden der Operatoren Sub und Prk erzeugen lässt.

Wir bezeichnen die Menge der primitiv-rekursiven Funktionen mit PRK.

Satz (einige primitiv-rekursive Funktionen)
Die wie folgt definierten Funktionen sind primitiv-rekursiv:

1. $c_n^{(k)} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $c_n^{(k)}(x_1, \dots, x_k) := n$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$ (konstante Funktionen).
2. $s : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $s(x,y) := x + y$ (Summe).
3. $V : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $V(x) := x \dot{-} 1$ (Vorgängerfunktion).
4. $d : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $d(x,y) := x \dot{-} y$ (arithmetische Differenz).
5. $m : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $m(x,y) := x \cdot y$ (Multiplikation).

Standardnummerierung von $\mathbb{Z}$

$\nu_{\mathbb{Z}} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ist definiert durch $\nu_{\mathbb{Z}}\langle n, k\rangle := n - k$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$.