Lösungshinweise zur Klausur 1653/1657 vom 19. Februar 2011

Aufgabe 1 *(12 Punkte)*

(i) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

korrekt	falsch	
[ ]	[X]	Eine Funktion $f :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist berechenbar genau dann, wenn es eine Turing-Maschine M mit $f_M = f$ gibt. **Falsch:** Die von Turing-Maschinen berechneten Funktionen sind Wortfunktionen.
[ ]	[X]	Eine Funktion $f :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist berechenbar genau dann, wenn es eine verallgemeinerte Registermaschine M mit $f_M = f$ gibt. **Falsch:** Die Existenz einer verallgemeinerten Registermaschine reicht nicht aus: alle vorkommenden Tests und Funktionen müssen zusätzlich berechenbar sein.
[ ]	[X]	Eine Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ ist rekursiv genau dann, wenn die Funktion $\mathrm{cf}_M :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad \mathrm{cf}_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ existiert. **Falsch:** Die charakteristische Funktion einer Menge existiert immer. Die Menge ist nur dann rekursiv, wenn diese Funktion auch berechenbar ist.
[X]	[ ]	Es gibt berechenbare Zahlenfunktionen, die weder primitiv-rekursiv noch LOOP-berechenbar sind. **Richtig:** z.B. Ackermann-Funktion.
[X]	[ ]	Es gibt totale, berechenbare Zahlenfunktionen, die weder primitiv-rekursiv noch LOOP-berechenbar sind. **Richtig:** s.o.
[X]	[ ]	Eine Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ ist rekursiv-aufzählbar genau dann, wenn die Funktion $d_M :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad d_M(n) = \begin{cases} 2^n & \text{falls } n \in M \\ \text{div} & \text{sonst} \end{cases}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, berechenbar ist. **Richtig:** Mengen sind rekursiv-aufzählbar gdw. sie Definitionsbereich berechenbarer Funktionen sind. Zu jeder berechenbaren Funktion läßt sich aber eine Funktion f konstruieren, die den gleichen Definitionsbereich besitzt und für die $f(n) = 2^n$ für alle n aus dem Definitionsbereich gilt.

(ii) Welche der folgenden Mengen ist rekursiv, rekursiv aufzählbar aber nicht rekursiv, nicht rekursiv aufzählbar?

rekursiv	r.a. und nicht rekursiv	nicht r.a.	
[X]	[ ]	[ ]	$\{(i,x) \mid x \in \mathrm{Def}(\varphi_i) \wedge \Phi_i(x) < i^2 \cdot x\}$
[ ]	[X]	[ ]	$\{(i,x) \mid x \in \mathrm{Def}(\varphi_i) \wedge \Phi_i(x) < \varphi_i(x) \cdot x\}$
[ ]	[X]	[ ]	$\{(i,x) \mid x \in \mathrm{Def}(\varphi_i) \wedge \Phi_i(x) > \varphi_i(x) \cdot x\}$
[ ]	[X]	[ ]	$\{(i,x) \mid \varphi_i(x) < i^2 \cdot x\}$
[ ]	[ ]	[X]	$\{(i,j) \mid \varphi_i = \varphi_{i^2+j}\}$
[ ]	[X]	[ ]	$\{(i,x) \mid \Phi_i(x) \in \mathbb{N} \wedge \Phi_i(x) \text{ ist keine Primzahl}\}$

Aufgabe 2 *(9 Punkte, je 3 pro Teilaufgabe)*

(i) Zusammenhang zwischen Wort-/Zahlenberechenbarkeit: **Satz 6.1.6**

(ii) Zusammenhang zwischen verallgemeinerten Registermaschinen und berechenbaren Funktionen: **Satz 3.2.4**

(iii) Zusammenhang zwischen rekursiv-aufzählbaren und rekursiven Teilmengen von $\mathbb{N}$: **Satz 8.2.6**

Aufgabe 3 *(16 Punkte)*

Gegeben sei das folgende While-Programm P:

$$((\text{WHILE } R_1 \neq 0 \text{ DO } ((R_1-; R_2+); R_0+)); (\text{WHILE } R_2 \neq 0 \text{ DO } (R_2-; (R_0+; R_0+))))$$

(i) Welche einstellige Funktion $AC \circ \tau(P) \circ EC$ wird von P berechnet. (3 Punkte)

(ii) Zeigen Sie Ihre Aussage aus Teil (i). (13 Punkte)

Lösung:

(i) Sei $f = AC \circ \tau(P) \circ EC$. Dann gilt $f(n) = 3 \cdot n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Sei im Folgenden Q_1 das While-Programm

$$Q_1 = (\text{WHILE } R_1 \neq 0 \text{ DO } ((R_1-; R_2+); R_0+))$$

und Q_2 das While-Programm

$$Q_2 = (\text{WHILE } R_2 \neq 0 \text{ DO } (R_2-; (R_0+; R_0+))).$$

Man zeigt zunächst per Induktion nach t:

$$(\forall t \in \mathbb{N}((\forall r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{N})(\tau(((R_1-; R_2+); R_0+))^t(r_0, r_1, r_2, 0, ...) = (r_0+t, r_1 \dot{-} t, r_2+t, 0, ...)))$$

Hieraus folgt nun sofort

$$\begin{aligned} \tau(Q_1) &= \tau((\text{WHILE } R_1 \neq 0 \text{ DO } ((R_1-; R_2+); R_0+))(0, r_1, 0, 0, ...) \\ &= \tau(((R_1-; R_2+); R_0+))^{r_1}(0, r_1, 0, 0, ...) \\ &= (r_1, 0, r_1, 0, 0, ...) \end{aligned}$$

für alle $r_1 \in \mathbb{N}$. Weiter zeigt man per Induktion nach t:

$$\forall t \in \mathbb{N}. \forall r_0, r_2 \in \mathbb{N}. \tau((R_2-; (R_0+; R_0+)))^t(r_0, 0, r_2, 0, 0, ...) = (r_0+2\cdot t, 0, r_2 \dot{-} t, 0, 0, ...)$$

Hieraus folgt nun

$$\begin{aligned} \tau(Q_2) &= \tau(((\text{WHILE } R_2 \neq 0 \text{ DO } (R_2-; (R_0+; R_0+))))(r_1, 0, r_1, 0, ...) \\ &= \tau((R_2-; (R_0+; R_0+)))^{r_1}(r_1, 0, r_1, 0, ...) \\ &= (2 \cdot r_1 + r_1, 0, 0, ...) \end{aligned}$$

für alle $r_1 \in \mathbb{N}$. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x) &= AC \circ \tau(P) \circ EC(x) = AC \circ \tau(P)(0, x, 0, 0, ...) \\ &= AC \circ \tau(Q_2) \circ \tau(Q_1)(0, x, 0, 0, ...) = AC \circ \tau(Q_2)(x, 0, x, 0, 0, ...) \\ &= AC(3 \cdot x, 0, 0, ...) = 3 \cdot x \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4 *(7 Punkte)*

In dieser Aufgabe soll eine Bandmaschine konstruiert werden, die das (arithmetische) Dekrementieren von Dualzahlen berechnet, d.h. geben Sie eine ausführlich kommentierte Bandmaschine an, die die Funktion $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$, definiert durch

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N}.\ \ \forall a_1, ..., a_n \in \{0,1\}.\exists b_1, ..., b_n \in \{0,1\}. \\ &\qquad f(a_1...a_n) = b_1...b_n \wedge \sum_{i=1}^n b_i 2^{n-i} = (\sum_{i=1}^n a_i 2^{n-i}) \dot{-} 1, \end{aligned}$$

berechnet.
Korrektheitsbeweise müssen nicht geführt werden.

Lösung:
Die folgende Bandmaschine läuft zunächst nach rechts, bis das erste Blank gefunden wird. Hierbei wird überprüft, ob die Eingabe eine 1 enthält. Falls nein, so kann die Maschine anhalten, da die Eingabe eine 0 darstellt. Sonst läuft sie wieder nach links, ersetzt alle Zeichen durch 1 bis das erste Zeichen 1 gelesen wird. Dieses wird durch 0 ersetzt. Anschliessend läuft die Maschine nach rechts bis ein Blank gefunden wird.

1:	R,	2	7:	1 ?	9 : 8
2:	1 ?	4 : 3	8:	1,	6
3:	B ?	12 : 1	9:	0,	10
4:	R,	5	10:	L,	11
5:	B ?	6 : 5	11:	B ?	12:10
6:	L,	7	12:	HALT	

Aufgabe 5 *(10 Punkte)*

Zeigen Sie mittels Diagonalisierung, dass es Teilmengen M von $\mathbb{N}$ gibt, so dass weder M noch $\mathbb{N} \setminus M$ rekursiv-aufzählbar ist.

(Hinweis: Betrachten Sie φ_i auf den Eingaben $2 \cdot i$ und $2 \cdot i + 1$.)

Lösung:
Sei $M := \{2j \mid 2j \notin \mathrm{Def}(\varphi_j)\} \cup \{2j+1 \mid 2j+1 \in \mathrm{Def}(\varphi_j)\}$.
Behauptung: Weder M noch $\mathbb{N} \setminus M$ sind r.a.
Beweis: Wir nehmen an, M oder $\mathbb{N} \setminus M$ ist r.a.

Fall 1: M ist r.a. Dann existiert ein j mit $\mathrm{Def}(\varphi_j) = M$. Hieraus folgt aber

$$2j \in M \Leftrightarrow 2j \notin \mathrm{Def}(\varphi_j) \Leftrightarrow 2j \notin M$$

Fall 2: $\mathbb{N} \setminus M$ ist r.a. Dann existiert ein j mit $\mathrm{Def}(\varphi_j) = \mathbb{N} \setminus M$. Hieraus folgt aber

$$2j+1 \in \mathbb{N} \setminus M \Leftrightarrow 2j+1 \notin M \Leftrightarrow 2j+1 \notin \mathrm{Def}(\varphi_j) \Leftrightarrow 2j+1 \in M \Leftrightarrow 2j+1 \notin \mathbb{N} \setminus M$$

In beiden Fällen erhält man einen Widerspruch.

Aufgabe 6 *(10 Punkte)*

Sei $\Sigma = \{0,1\}$ und bezeichne $W^{(1)}$ die Menge der berechenbaren Funktionen $f :\subseteq \Sigma^* \to \Sigma^*$. Definieren Sie eine surjektive Abbildung $\gamma : \Sigma^* \to W^{(1)}$, so dass die Funktion $t_\gamma :\subseteq \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$, definiert durch $\forall u, v \in \Sigma^*. t_\gamma(u,v) = \gamma(u)(v)$, berechenbar ist. (Beweis)

(Hinweis: Benutzen Sie Standardnummerierungen.)

Lösung:

Sei ν_Σ eine Standardnummerierung von Σ^* und sei γ definiert durch

$$\gamma(u)(v) = \nu_\Sigma(\varphi_{\nu_\Sigma^{-1}(u)}(\nu_\Sigma^{-1}(v)))$$

für alle $u, v \in \Sigma^*$. Nach Satz 6.1.6 ist γ eine surjektive Abbildung $\gamma : \Sigma^* \to W^{(1)}$. Nach dem utm-Theorem ist u_φ berechenbar und somit wiederum nach Satz 6.1.6 auch die Funktion $t_\gamma = \nu_\Sigma \circ u_\varphi \circ (\nu_\Sigma^{-1} \times \nu_\Sigma^{-1})$.

Aufgabe 7 *(14 Punkte, je 7 pro Teilaufgabe)*

(i) Zeigen Sie, dass zu jeder berechenbaren Funktion $g :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine totale, berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert mit

$$(\forall i, n \in \mathbb{N})(\varphi_{f(i)}(n) = g(i))$$

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (i), dass sich jede rekursiv-aufzählbare Menge auf K_φ reduzieren lässt.

Lösung:

(i) Sei $h :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definiert durch $h(i,n) := g(i)$ für alle $i, n \in \mathbb{N}$. Als Komposition der berechenbaren Funktion g und einer Projektion ist h berechenbar. Nach dem smn-Theorem existiert also eine berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$(\forall i, n \in \mathbb{N})(\varphi_{f(i)}(n) = h(i,n) = g(i)).$$

(ii) Sei M zunächst eine rekursiv-aufzählbare Teilmenge von $\mathbb{N}$. Dann existiert eine berechenbare Funktion $g \in P^{(1)}$ mit $\mathrm{Def}(g) = M$. Nach Teil (i) existiert dann auch eine Funktion $f \in R^{(1)}$ mit $(\forall i, n \in \mathbb{N})(\varphi_{f(i)}(n) = g(i))$, insbesondere

$$i \in M \Leftrightarrow i \in \mathrm{Def}(g) \Leftrightarrow g(i) \text{ existiert } \Leftrightarrow \varphi_{f(i)}(f(i)) \text{ existiert } \Leftrightarrow f(i) \in K_\varphi.$$

Für allgemeines $M \subseteq \mathbb{N}^k$, $k \in \mathbb{N}$, lässt sich dann M zunächst auf $\pi^k(M)$ reduzieren. Die Behauptung folgt dann auf Grund der Transitivität der Reduzierbarkeits-Relation $\leq$.

<u>Aufgabe 8</u> *(10 Punkte)*

Zeigen Sie:
Eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ ist genau dann rekursiv, wenn sie endlich ist oder eine totale, berechenbare Funktion $f :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert mit

a) $(\forall i, j \in \mathbb{N})(i^2 < j \Rightarrow f(i) < f(j))$ und

b) $f(\mathbb{N}) = A$.

Lösung:
Wenn A rekursiv und nicht endlich ist, so existiert nach Satz 8.1.5 eine wachsende berechenbare Funktion $f \in R^{(1)}$ mit $\mathrm{Bild}(f) = A$. Diese Funktion erfüllt also insbesondere die Eigenschaften (i) und (ii).

Da jede endliche Menge rekursiv ist, genügt es zu zeigen, dass aus der Existenz einer berechenbaren Funktion f, die die Eigenschaft (i) erfüllt, stets folgt, dass $\mathrm{Bild}(f)$ rekursiv ist. Sei hierzu f eine solche Funktion. Aus Eigenschaft (i) folgt sofort für alle i, j: $j \leq 2^{2^i} \Rightarrow f(j) < f(2^{2^{i+1}})$. Insbesondere gilt also $f(2^{2^i}) \geq i$. Da sowohl $i \mapsto 2^{2^i}$ also auch f berechenbar sind, ist auch die Funktion cf_A,

$$cf_A(i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i \in \{f(0), f(1), ..., f(2^{2^{i+1}} - 1)\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $i \in \mathbb{N}$, berechenbar.

Aufgabe 9 *(12 Punkte)*

Geben Sie nicht-äquivalente Nummerierungen von $\mathbb{Z}$ an, d.h. definieren Sie Nummerierungen ν_1 und ν_2 von $\mathbb{Z}$, so dass nicht $\nu_1 \equiv \nu_2$ gilt. Beweisen Sie, dass tatsächlich $\nu_1 \not\equiv \nu_2$.

Lösung:
Seien ν_1, ν_2 definiert durch $\nu_1\langle i, j\rangle = i - j$ und $\nu_2(2 \cdot i) = \nu_1(i)$, $\nu_2(2 \cdot i + 1) = \mathrm{cf}_{K_\varphi}(i)$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Dann sind ν_1, ν_2 surjektiv, insbesondere also Nummerierungen von $\mathbb{Z}$.
Behauptung: $\nu_2 \not\leq \nu_1$.
Beweis: Angenommen $\nu_2 \leq \nu_1$. Dann existiert ein $f \in R^{(1)}$ mit $\nu_2(i) = \nu_1(f(i))$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt $\mathrm{cf}_{K_\varphi}(i) = \nu_1(f(2 \cdot i + 1))$ für alle $i \in \mathbb{N}$, d.h. mit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(i) = f(2 \cdot i + 1)$ für alle $i \in \mathbb{N}$, erhalten wir eine berechenbare Funktion mit $g^{-1}(\{\langle i, j\rangle \mid i \neq j\}) = K_\varphi$. Mit der Menge $\{\langle i, j\rangle \mid i \neq j\}$ wäre also auch K_φ rekursiv. Widerspruch.