Klausur Sommersemester 05

Aufgabe 1

2 Punkte **a)** Definieren Sie den Begriff der konischen Hülle.

6 Punkte **b)** Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

$$\text{Cone } S = \text{Lin } S \Leftrightarrow \forall x \in S : -x \in \text{Cone } (S \setminus \{x\}).$$

Aufgabe 2

2 Punkte **a)** Definieren Sie den Begriff der Seite eines Polyeders.

4 Punkte **b)** Seien $n, r \in \mathbb{N}$, $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polyeder und $f : \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Bx + c$ eine affine Abbildung. Beweisen Sie: $f^{-1}(P) \subset \mathbb{R}^r$ ist ein Polyeder.

6 Punkte **c)** Sei F eine Seite von P. Wann ist $f^{-1}(F)$ eine Seite von $f^{-1}(P)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3

2 Punkte **a)** Definieren Sie den Begriff des Polytops.

6 Punkte **b)** Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \leq 1\}$, wobei für

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \|x\|_\infty = \max\{|x_i| \mid i \in \mathbb{N}_n\}.$$

Also ist P die Menge der Punkte, deren Betrag in jeder Koordinate höchstens 1 ist. Zeigen Sie: P ist ein Polytop.

Aufgabe 4

2 Punkte **a)** Was versteht man unter einer *zulässigen* linearen Optimierungsaufgabe?

2 Punkte **b)** Formulieren Sie den Dualitätssatz der Linearen Optimierung.

6 Punkte **c)** Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}_n$. Folgern Sie aus dem Dualitässatz die nachstehende Aussage des Kurses:

$$\max\ \{cx \mid x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0,\ Ax \leq b\} = \min\ \{yb \mid y \in \mathbb{R}_m,\ y \geq 0,\ yA \geq c\},$$

falls beide linearen Optimierungsaufgaben zulässig sind.

Aufgabe 5

Eine Fischerei produziert pro Tag 480 Lachse, 400 Aale und 230 Schollen. Jedes Produkt kann frisch oder geräuchert verkauft werden. An einem Tag können 420 Fische geräuchert werden, dazu 250 in Überstunden zu höheren Kosten.

Tabelle der Nettogewinne:

	frisch	geräuchert	ger. in Überst.
Lachs	8	14	11 Euro
Aal	4	12	7 Euro
Scholle	4	13	9 Euro

6 Punkte **a**) Formulieren Sie ein mathematisches Modell mit sechs Variablen zur Maximierung des Nettogewinns an einem Tag.

6 Punkte **b**) Verifizieren Sie die Optimalität des folgenden Tagesplanes

- 400 Aale werden ohne Überstunden geräuchert
- 20 Schollen werden ohne, 210 mit Überstunden geräuchert
- 40 Lachse werden in Überstunden geräuchert und 440 frisch verkauft.

(Tipp: Falls Sie eine duale Lösung konstruieren, setzen Sie die Variable für den ohne Überstunden geräucherten Fisch auf 7.)

Aufgabe 6

6 Punkte Lösen Sie folgende lineare Programmierungsaufgabe mit dem Simplexalgorithmus:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcr}
\max & x_1 & - & x_2 & & & & & & & & \\
\text{unter} & 5x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 10 \\
 & 2x_1 & + & 5x_2 & & & & & - & x_5 & = & 4 \\
 & x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & & & & & = & 5 \\
 & \multicolumn{5}{l}{x_i \geq 0 \text{ für alle } i} & & & & & &
\end{array}$$

Klausur Wintersemester 05/06.

Aufgabe 1

2 Punkte **a**) Definieren Sie den Begriff des Polyeders und der Seite eines Polyeders.

10 Punkte **b**) Seien $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \leq 1\}$, wobei $\|x\|_\infty = \max_{i=1}^n\{|\xi_i|\}$ die Maximumsnorm bezeichne und

$$F = \left\{ x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid -1 \leq \xi_1 \leq 1,\, \xi_2 = \ldots = \xi_n = 1 \right\}.$$

Zeigen Sie: P ist ein Polyeder und F ist eine Seite von P.

Aufgabe 2

Sei $K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \leq 1\}$ die Einheitskreisscheibe in der Ebene und $x_0 \in K$.

3 Punkte **a)** Zeigen Sie: K ist konvex.

6 Punkte **b)** Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

i) x_0 ist ein Extremalpunkt von K, d.h. $\forall y, z \in K : x_0 \in [y, z] \Rightarrow x_0 \in \{y, z\}$.

ii) $K \setminus x_0$ ist konvex.

3 Punkte **c)** Ist K ein Polytop? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die lineare Optimierungsaufgabe:

$$\max 3\xi_1 + 4\xi_2$$

unter der Bedingung

$$\begin{aligned} \xi_1 + 2\xi_2 &\leq 10 \\ \xi_1 + \xi_2 &\leq 8 \\ 3\xi_1 + 5\xi_2 &\leq 26 \\ \xi_1, \xi_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

3 Punkte **a)** Stellen Sie die zu dieser Aufgabe duale lineare Optimierungsaufgabe auf.

5 Punkte **b)** Bestimmen Sie eine Optimallösung des primalen Programms und schließen Sie aus dem Komplementaritätssatz, dass die zur ersten Ungleichung gehörende Variable des dualen Problems in jeder Optimallösung Null ist.

Aufgabe 4

Eine Raffinerie betreibt Anlagen verschiedener technischer Spezifikationen. Die Anlage I hat eine Kapazität von 2 Tonnen pro Tag, Anlage II eine von 3 Tonnen pro Tag. Mit der Anlage I kann man in 10 Stunden aus einer Tonne Rohöl 3/4 Tonne Benzin und 1/4 Tonne Heizöl gewinnen. Anlage II produziert in 5 Stunden aus einer Tonne Rohöl 1/4 Tonne Benzin und eine 3/4 Tonne Heizöl. Die Verarbeitungskosten für eine Tonne Rohöl liegen für Anlage I bei 360 €, für Anlage II bei 180 €. Die Anlagen können 20 Stunden pro Tag betrieben werden und vom Zulieferer erhält man pro Tag 4 Tonnen Rohöl. Der Verkaufspreis für Benzin beträgt 1710 € pro Tonne und für Heizöl 630 €.

6 Punkte **a**) Formulieren Sie ein mathematisches Modell zur Maximierung des Nettogewinns an einem Tag.

4 Punkte **b**) Lösen Sie das Problem mit der graphischen Methode.

Aufgabe 5

6 Punkte Lösen Sie folgende lineare Programmierungsaufgabe mit dem Simplexalgorithmus:

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \max & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & \\ \text{unter} & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\ & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \geq & 8 \\ \end{array}$$
$$x_i \geq 0 \text{ für alle } i$$

Aufgabe 6

2 Punkte **a)** Definieren Sie den Begriff der konvexen Hülle als Menge aller über X gebildeten Konvexkombinationen.

6 Punkte **b)** Sei $S = \{s_1, \ldots, s_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie die Gültigkeit des *Antiaustauschaxioms*:

$$\forall x \neq y \in \mathbb{R}^n : y \in \text{Conv}\,(S \cup \{x\}) \setminus \text{Conv}\,(S) \Longrightarrow x \notin \text{Conv}\,(S \cup \{y\}).$$

(Hinweis: Zeigen Sie
$y \in \text{Conv}\,(S \cup \{x\}) \setminus \text{Conv}\,(S)$ und $x \in \text{Conv}\,(S \cup \{y\}) \setminus \text{Conv}\,(S) \Longrightarrow x = y$.)

Klausur Sommersemester 06

Aufgabe 1

1 Punkt **a)** Definieren Sie den Begriff der affinen Hülle einer Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

6 Punkte **b)** Wir nennen $\{a_0, \dots, a_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ *affin abhängig*, wenn es $\lambda_0, \dots, \lambda_p$, die nicht alle gleich 0 sind, gibt mit $\sum_{i=0}^p \lambda_i a_i = 0$ und $\sum_{i=0}^p \lambda_i = 0$. Zeigen Sie:

$$\{a_0, \dots, a_p\} \text{ affin abhängig } \iff \exists\, 0 \le i_0 \le n : a_{i_0} \in \operatorname{Aff}(\{a_0. \dots, a_n\} \setminus \{a_{i_0}\}).$$

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass die affine Hülle aus der Menge aller affinen Kombinationen besteht.

Aufgabe 2

Sei $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_3 \mid x + y + z \le 2,\ 3x + y + z \le 3,\ x, y, z \ge 0\}$.

1 Punkt **a)** Zeigen Sie: S ist konvex.

6 Punkte **b)** Finden Sie alle Extremalpunkte von S.

2 Punkte **c)** Bestimmen sie $\max\{x + 2y + z \mid (x, y, z) \in S\}$.

Aufgabe 3

Seien $a_1, \dots, a_p, c_1, \dots, c_p$ und α positive reelle Zahlen. Betrachten Sie die lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{array}{rl} \max & \sum_{i=1}^p c_i x_i \\ \text{unter} & \sum_{i=1}^p a_i x_i = \alpha \\ & 0 \le x_i \le 1 \text{ für } 1 \le i \le p. \end{array}$$

6 Punkte **a)** Zeigen Sie: Ist $x = (x_1, \dots, x_p)$ eine zulässige Ecke des Problems, so gibt es höchstens ein $1 \le i_0 \le p$ mit $x_{i_0} \notin \{0, 1\}$.

6 Punkte **b)** Zeigen Sie: Ist x^* eine optimale Ecke, so gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} c_i > \lambda a_i \quad &\Rightarrow \quad x_i^* = 1 \\ c_i < \lambda a_i \quad &\Rightarrow \quad x_i^* = 0. \end{aligned}$$

Hinweis: Wählen Sie $\lambda = \frac{c_{i_0}}{a_{i_0}}$ oder ähnlich.

Aufgabe 4

Welche der folgenden Aussagen ist richtig bzw. falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

2 Punkte **a)** Beim Simplex Algorithmus verwendet man in der Praxis zumeist die Dantzigsche Gradienten-Regel, da diese zur größtmöglichen Verbesserung der Zielfunktion in der nächsten Ecke führt.

2 Punkte **b)** Ein Nichtbefolgen der Regel zur Wahl der Pivotzeile führt im nichtentarteten Fall zu einer unzulässigen Basis.

2 Punkte **c)** Wenn eine lineare Optimierungsaufgabe eine Gleichungsrestriktion hat, so kann man durch Einführen einer künstlichen Schlupfvariablen sofort eine Basis finden, die eine für das Ausgangsproblem zulässige Lösung liefert.

4 Punkte **d)** Beantworten Sie folgende Frage kurz (nicht mit richtig oder falsch): Die Dantzigsche beste Verbesserungs-Regel bringt in jeder Iteration den größten Fortschritt. Obwohl diese Regel erfahrungsgemäß normalerweise weniger Pivots als die Gradientenregel braucht, wird sie in der Praxis kaum benutzt. Warum nicht?

Aufgabe 5

Eine Zulieferfirma der Perpetuummobileindustrie stellt drei Kleinteile X, Y und Z auf zwei Maschinen A und B her. Gehen Sie davon aus, dass man ohne Umrüstkosten und Zeitverlust ein Kleinteil erst auf Maschine A produzieren und auf Maschine B fertigstellen kann. Ebensogut soll man auch die Reihenfolgen der Maschinen bei der Produktion vertauschen können.
Die Herstellung von Teil X benötigt auf Maschine A 36 Sekunden und auf Maschine B 180 Sekunden. Teil Y benötigt 72 Sekunden auf A und ebenso lange auf B, Teil Z 180 Sekunden auf A und 144 Sekunden auf B. Der Abnehmer zahlt für die Teile X, Y bzw. Z jeweils $5, 4$ bzw. 3 € pro Stück.

6 Punkte **a**) Formulieren Sie die Aufgabe, den Erlös pro Woche zu maximieren, wenn die Maschinenlaufzeit pro Woche 40 Stunden beträgt, als Lineares Programm.

3 Punkte **b**) Bestimmen Sie einen optimalen Produktionsplan.

Aufgabe 6

9 Punkte Betrachten Sie folgende lineare Programmierungsaufgabe:

$$\begin{array}{rrcrcrcr}
\min & 18y_1 & - & 4y_2 & + & 8y_3 & & \\
\text{unter} & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & \geq & 1 \\
& y_1 & & & - & y_3 & \geq & 3 \\
& y_1 & - & 2y_2 & + & y_3 & \geq & 5 \\
& & & & & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0.
\end{array}$$

Bestimmen Sie die duale Optimierungsaufgabe und Optimallösungen zu beiden Problemen.

Klausur WS 06/07

Aufgabe 1

1 Punkte **a**) Definieren Sie den Begriff des (positiven) Kegels.

4 Punkte **b**) Zeigen Sie: $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein (positiver) Kegel, wenn

C1' $0 \in C$.

C2' $\forall x, y \in C \; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ : \alpha x + \beta y \in C$.

4 Punkte **c**) Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ heißt *positiv semidefinit*, wenn

$$\forall v \in \mathbb{R}^n : {}^t v A v \geq 0.$$

Zeigen Sie: Die Menge der symmetrischen ($A = {}^t A$), positiv semidefiniten Matrizen bildet als Teilmenge von $\mathbb{R}^{n^2}$ betrachtet einen (positiven) Kegel.

Aufgabe 2

Sei P die Lösungsmenge des folgenden linearen Ungleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x & & & - & z & \geq & 0 \\ & & y & - & z & \geq & 0 \\ x & & & + & z & \leq & 2 \\ & & y & + & z & \leq & 2 \\ & & & & z & \geq & 0 \end{array}$$

1 Punkte **a)** Zeigen Sie: P ist ein Polyeder.

10 Punkte **b)** Bestimmen Sie alle Seiten von P.

1 Punkte **c)** Skizzieren Sie P.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die lineare Optimierungsaufgabe:

$$\begin{array}{rccccccccc} \min & 2\xi_1 & + & 3\xi_2 & + & 2\xi_3 & + & 2\xi_4 & & \\ \text{unter} & \xi_1 & + & 2\xi_2 & + & \xi_3 & + & 2\xi_4 & = & 3 \\ & \xi_1 & + & \xi_2 & + & 2\xi_3 & + & 4\xi_4 & = & 5 \\ & & & & & & & & \xi_i & \geq & 0. \end{array}$$

3 Punkte **a)** Stellen Sie die zu dieser Aufgabe duale lineare Optimierungsaufgabe auf.

4 Punkte **b)** Lösen Sie das duale Programm mit der graphischen Methode.

5 Punkte **c)** Bestimmen Sie, etwa aus der Optimallösung des dualen Programms mit Hilfe des Komplementaritätssatzes, eine Optimallösung des primalen Problems.

Aufgabe 4

7 Punkte Die Discount-Supermarktkette Mega-Mart plant einen neuen Supermarkt in Hartzburg. Die Gemeinde stellt großzügig zu günstigen Konditionen Fläche zur Verfügung, so dass die nutzbare Verkaufsfläche des Marktes bei 7.000 m^2 liegen wird. Auf Grund von Erfahrungswerten geht der Marktmanager folgenden Profiten pro Jahr pro Quadratmeter aus:

Abteilung	Profit pro m^2
Herrenbekleidung	€ 85
Damenbekleidung	€ 102
Kinderbekleidung	€ 90
Spielwaren	€ 104
Haushaltswaren	€ 82
Elektronik	€ 98
Autozubehör	€ 76

Für Spielwaren, Elektronik und Autozubehör benötigt man über die belegte Fläche hinaus zusätzlich 10 % der zugewiesenen Fläche als Lagerraum. Jede Abteilung benötigt mindestens 750 m^2 reine Verkaufsfläche und keine Abteilung sollte mehr als 20 % des Gesamtplatzangebotes beanspruchen.
Formulieren Sie ein mathematisches Modell zur Maximierung des Jahresprofits.

Aufgabe 5

6 Punkte Lösen Sie folgende lineare Programmierungsaufgabe mit dem Simplexalgorithmus. Benutzen Sie die Zweiphasenmethode, um eine Startlösung zu bestimmen:

$$\begin{array}{rrcrcrcl}
\min & 4\xi_1 & + & \xi_2 & + & \xi_3 & & \\
\text{unter} & 2\xi_1 & + & \xi_2 & + & 2\xi_3 & = & 4 \\
 & 3\xi_1 & + & 3\xi_2 & + & \xi_3 & = & 3 \\
 & & & & & \xi_i & \geq & 0
\end{array}$$

Hinweis: Eine Wahl des ersten Pivotelementes in der dritten Spalte ist günstig. Die auftretenden Nenner sind, wenn man im Folgenden die Blandsche Regel benutzt nach meiner Rechnung 2,3 und 5.

Aufgabe 6

Sei

$$\max\{cx \mid x \in \mathbb{R}^n,\ Ax = b,\ x \geq 0\}$$

eine lineare Optimierungsaufgabe.

1 Punkte **a)** Formulieren Sie die zu dieser Aufgabe duale Optimierungsaufgabe.

3 Punkte **b)** Zeigen Sie: Ist x zulässig für die primale Aufgabe und u zulässig für die duale Aufgabe, so gilt $cx \leq ub$.

6 Punkte **c)** Zeigen Sie: Ist x^* zulässig für die primale Aufgabe und u^* zulässig für die duale Aufgabe, so sind x^*, u^* genau dann Optimallösungen der primalen bzw. der dualen Optimierungsaufgabe, wenn die folgenden beiden Komplementaritätsbedingungen gelten

1. $x_i^* > 0 \Longrightarrow (u^*A)_i = c_i$
2. $(u^*A)_i > c_i \Longrightarrow x_i^* = 0$.