Elementare Zahlentheorie mit Maple (01202) WS 16/17

Klausur am 11.03.2017:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n > 1$ und seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: Aus $ab \equiv cd (\bmod m)$, $b \equiv d (\bmod n)$ und $\mathrm{ggT}(b, n) = 1$ folgt $a \equiv c (\bmod \mathrm{ggT}(m, n))$.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 2

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $M_n = 2^n - 1$ die n-te Mersenne'sche Zahl und für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $F_n = 2^{2^n} + 1$ die n-te Fermat'sche Zahl. Zeigen Sie (zum Beispiel mit Induktion), dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$M_{2^n} = \prod_{k=0}^{n-1} F_k.$$

[*10 Punkte*]

Aufgabe 3

Berechnen Sie

(a) $3^{1202} \bmod 1202$,

(b) $3^{2017} \bmod 2017$,

(c) $3^{78} \bmod 78$.

(Hinweis: Es ist $1202 = 2 \cdot 601$, und 601 ist eine Primzahl, 2017 ist eine Primzahl und $78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$.)

[*3 + 3 + 4 = 10 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, wobei $f(n)$ die Anzahl der ungeraden, positiven Teiler von n ist. Zeigen Sie, dass f multiplikativ ist.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 5

Sei $n \in \mathbb{N}$, so dass es rationale Zahlen $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ gibt, so dass

$$n = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{d}\right)^2$$

gilt. Zeigen Sie, dass n die Summe von zwei Quadraten ganzer Zahlen ist.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 6

Bestimmen Sie alle Gauß'schen Primzahlen z mit $N(z) \leq 5$.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 7

In der Programmbibliothek für Gauß'sche Zahlen `GaussInt` berechnet der Befehl `GInorm` die Norm einer Gauß'schen Zahl, und der Befehl `GIprime` gibt `true` aus, wenn die eingegebene Gauß'sche Zahl eine Gauß'sche Primzahl ist und `false`, wenn sie es nicht ist. In der folgenden Prozedur sind die Zeilen durcheinander geraten.

```
1  aufgabe7:=proc()
2  end:
3  L:=[op(L),z]
4  fi;
5  while i <= 2 do
6  od;
7  local z,i,j,L;
8  fi;
9  od;
10 with(GaussInt):
11 print(L);
12 if GInorm(z)<= 5 then
13 i:=i+1;
14 if GIprime(z) then
15 for j from -2 to 2 do
16 L:=[];
17 i:=-2;
18 z:=i+I*j;
```

(a) Bringen Sie die Programmzeilen in eine sinnvolle Reihenfolge, so dass ein lauffähiges Maple-Programm entsteht (Zeilennummern genügen).

(b) Beschreiben Sie in höchstens zwei Sätzen, was die Prozedur berechnet.

[*8 + 2 = 10 Punkte*]

Aufgabe 8

Für jede natürliche Zahl n, die nicht vollkommen ist, gilt $\sigma(n) < 2n$ oder $\sigma(n) > 2n$. Wir möchten die Vermutung testen, dass mehr als $\frac{3}{4}$ aller Zahlen n zwischen 1 und einer gegebenen natürlichen Zahl a die Eigenschaft $\sigma(n) < 2n$ erfüllen.

Schreiben Sie dazu eine Maple-Prozedur `Teilersumme`, die als Eingabe eine natürliche Zahl a bekommt. Die Prozedur soll testen, ob a wirklich eine natürliche Zahl ist, und falls das der Fall ist, den Anteil natürlicher Zahlen n zwischen 1 und a berechnen und ausgeben, für die $\sigma(n) < 2n$ gilt. Ist der Anteil größer als $\frac{3}{4}$, soll die Prozedur außerdem `true` ausgeben, andernfalls `false`.

[*10 Punkte*]