FernUniversität in Hagen

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität ·58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

FernUniversität in Hagen
FAKULTÄT für Mathematik und Informatik

KLAUSUR zum Kurs Elementare Zahlentheorie mit Maple (01202)
WS 2012/13

DATUM: 16.02.2013
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise

(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte das Adressfeld leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **80** Punkte erreichen.
5. Als Hilfsmittel erlaubt sind der Studienbrief, die Einsendeaufgaben und die Musterlösungen der Einsendeaufgaben dieses Semesters. Persönliche Notizen in diesen Aufzeichnungen sind erlaubt.
6. Weitere Hilfsmittel wie Bücher oder Taschenrechner dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit 5 bewertet wird.

	Bemerkungen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Bearbeitet									
max. Punktezahl	10	10	10	10	12	8	10	10	80
erreichte Punktezahl									
Korrektur									

Prüfergebnis/Note	

Elementare Zahlentheorie mit Maple (01202) WS 2012/13

Klausur am 16.02.2013:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und sei $d = \mathrm{ggT}(m, m+n)$. Zeigen Sie: $d \mid n$.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 2

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $p_1, p_2, \ldots, p_n$ Primzahlen mit $p_i \neq 2$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Beweisen Sie: $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ ist keine Primzahl.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, und seien $a, b \in \mathbb{Z}$.

Zeigen Sie: Wenn $a^2 \equiv b^2 \pmod{p}$ gilt, dann folgt daraus $a \equiv b \pmod{p}$ oder $a \equiv -b \pmod{p}$.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 4

Seien $d, n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie: Aus $d \mid n$ folgt $\varphi(d) \mid \varphi(n)$.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 5

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Seien $a, c \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass (a, a, c) niemals Lösung von $X^n + Y^n = Z^n$ sein kann.

Hinweis: Widerspruchsbeweis.

[*12 Punkte*]

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass die Gauß'schen Zahlen $1 + 2i$ und $2 + i$ nicht zueinander assoziiert sind.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 7

Gegeben ist die nachfolgende Prozedur. (Die Zeilennummerierung dient zu Ihrer Orientierung.)

```
>    klausur:=proc(n)
  1. local k, i, a, p;
  2. k:=1;
  3. i:=2;
  4. p:=n;
  6. while p > 1 do
  7.   a:=0;
  8.   while p mod i = 0 do
  9.     a:=a+1;
 10.     p:=p/i;
 11.   od;
 12.   if type(a,even) then
 13.     a:=a/2;
 14.   else
 15.     a:=(a-1)/2;
 16.   fi;
 17.   k:=k*(i^a);
 18.   i:=nextprime(i);
 19. od;
 20. print(k);
 21. end:
```

1. Vollziehen Sie die Prozedur mit $n = 360$ Schritt für Schritt nach und geben Sie `k` an.
2. Beschreiben Sie in wenigen Sätzen allgemein, was diese Prozedur tut.

Hinweis: Mit dem Befehl `type(a,even)` wird geprüft, ob die übergebene Variable `a` gerade (`even`) ist. Ist sie gerade, liefert die Prozedur `type` das Ergebnis `true`, andernfalls `false`.

[*$7 + 3 = 10$ Punkte*]

Aufgabe 8

Schreiben Sie eine Prozedur `primzahl`, die alle Primzahlen der Form $n^3 - 1$ für alle $n \in \{1, \ldots, 100\}$ bestimmt, in einer Menge `M` speichert und diese Menge ausgibt.

[*10 Punkte*]