

Klausur am 27.08.2016:**Aufgabenstellungen**

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen!

Aufgabe 1

Zeigen Sie: Die Diophantische Gleichung $aX + bY + cZ = d$ ist genau dann lösbar in \mathbb{Z} , wenn $\text{ggT}(a, b, c) \mid d$ gilt.

Hinweis: Sie dürfen ohne zu beweisen verwenden, dass $\text{ggT}(a, b, c) = \text{ggT}(\text{ggT}(a, b), c)$ gilt.

[12 Punkte]

Aufgabe 2

1. Beweisen Sie, dass das Produkt von Primzahlzwillingen erhöht um 1 stets eine Quadratzahl ist.
2. Bestimmen Sie alle Primzahlpaare p und q , die die Gleichung $p - q = 3$ erfüllen.

[3 + 5 = 8 Punkte]

Aufgabe 3

Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $c > 1$, so dass $a \equiv b \pmod{c}$. Zeigen Sie, dass daraus $\text{ggT}(a, c) = \text{ggT}(b, c)$ folgt.

[10 Punkte]

Aufgabe 4

Die natürliche Zahl n besitze genau zwei verschiedene Primfaktoren p und q mit $n = p^r q^s$, $r, s \geq 1$, und es sei $\tau(n^2) = 81$. Berechnen Sie $\tau(n^3)$ und begründen Sie Ihre Antwort.

[10 Punkte]

Aufgabe 5

Beweisen Sie: Sind x und y teilerfremd, dann sind auch xy und $x^2 + y^2$ teilerfremd.

[12 Punkte]

Aufgabe 6

Beweisen Sie, dass

$$\sum_{k=0}^n 2k + 1 = (n + 1)^2$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

[8 Punkte]

Aufgabe 7

Schreiben Sie eine Prozedur `zwillinge:=proc(n)`, die eine Menge

$\{\{p_{11}, p_{12}\}, \{p_{21}, p_{22}\}, \{p_{31}, p_{32}\}, \dots\}$

aller Primzahlzwillinge kleiner als n ausgibt, wobei der größere Zwilling p_{i2} kleiner als n sein soll.

[10 Punkte]

Aufgabe 8

Leider ist die Reihenfolge der Befehle folgender Prozedur durcheinander geraten:

```
for i from 1 to n do
  L := [op(L), i];
  print(L);
  klausur := proc(n)
    if p = i/2 then
      L := [];
    end:
    local i, p, L;
    p := phi(i);
  od;
fi;
```

Sie können davon ausgehen, dass der Befehl `with(numtheory)`: bereits eingegeben wurde.

1. Bringen Sie die Befehle in eine sinnvolle Reihenfolge und schreiben Sie Ihre Lösung explizit auf (Sie sollen nicht nur Zeilennummern angeben!).
2. Beschreiben Sie kurz, was die von Ihnen erstellte Prozedur tut.

[7 + 3 = 10 Punkte]