FernUniversität in Hagen

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität ·58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

FernUniversität in Hagen
FAKULTÄT für Mathematik und Informatik

KLAUSUR zum Kurs Elementare Zahlentheorie mit Maple (01202)
SoSe 2012

DATUM: 08.09.2012
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise
(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte das Adressfeld leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **40** Punkte erreichen.
5. Als Hilfsmittel erlaubt sind der Studienbrief, die Einsendeaufgaben und die Musterlösungen der Einsendeaufgaben dieses Semesters. Persönliche Notizen in diesen Aufzeichnungen sind erlaubt.
6. Weitere Hilfsmittel wie Bücher oder Taschenrechner dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit 5 bewertet wird.

	Bemerkungen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Bearbeitet								
max. Punktezahl	10	10	12	10	10	8	20	80
erreichte Punktezahl								
Korrektur								

Prüfergebnis/Note	

Elementare Zahlentheorie mit Maple (01202) SoSe 2012

Klausur am 08.09.2012:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b > 0$.

Beweisen Sie, dass es zwei Zahlen $q, r \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass die beiden Bedingungen $a = qb + r$ und $2b \leq r < 3b$ erfüllt sind.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 2

Sei $p \geq 5$ eine Primzahl. Beweisen Sie, dass $p^2 + 2$ niemals eine Primzahl ist.

Hinweis: Teilen Sie p durch 3 mit Rest.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 3

Seien x und y ungerade ganze Zahlen. Zeigen Sie, dass die Summe der Quadrate $x^2 + y^2$ niemals eine Quadratzahl sein kann.

Hinweis: Betrachten Sie $x^2 + y^2$ modulo 4.

[*12 Punkte*]

Aufgabe 4

Seien $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ multiplikative Funktionen, die für jede Primzahl p und jedes $k \in \mathbb{N}$ die Gleichung $f(p^k) = g(p^k)$ erfüllen.

Beweisen Sie, dass $f(n) = g(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 5

Sei $d \in \mathbb{N}$ teilbar durch eine Primzahl p, für die $p \equiv 3 \pmod 4$ gilt.

Beweisen Sie, dass dann die Gleichung $X^2 - dY^2 = -1$ keine Lösung besitzt.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 6

Sei $n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: Wenn n als Differenz zweier Quadratzahlen geschrieben werden kann, also $n = a^2 - b^2$ gilt, dann ist n das Produkt aus zwei ganzen Zahlen, die entweder beide gerade oder beide ungerade sind.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 7

Schreiben Sie eine Maple-Prozedur `divrest`, der zwei Gauß'sche Zahlen z und w (Datentyp `complex`) mit $w \neq 0$ übergeben werden. Diese Prozedur soll zwei Gauß'sche Zahlen q und r berechnen und ausgeben, für die $z = qw + r$ mit $0 \leq N(r) < N(w)$ wie in Satz 7.4.4 gilt. Die Bibliothek `GaussInt` dürfen Sie **nicht** verwenden.

Hinweis: Möglicherweise können Ihnen die beiden Prozeduren `floor()` und `abs()` nützlich sein. `abs()` berechnet den Betrag einer reellen Zahl.

[*20 Punkte*]