FernUniversität in Hagen

FernUniversität in Hagen
FAKULTÄT für Mathematik und Informatik

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität ·58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

KLAUSUR zum Kurs Elementare Zahlentheorie mit Maple (01202)
SoSe 2011

DATUM: 10.09.2011
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise

(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte das Adressfeld leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **40** Punkte erreichen.
5. Erlaubt sind der Studienbrief, die Einsendeaufgaben und die Musterlösungen der Einsendeaufgaben dieses Semesters. Persönliche Notizen in diesen Aufzeichnungen sind erlaubt.
6. Weitere Hilfsmittel wie Bücher oder Taschenrechner dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit 5 bewertet wird.

	Bemerkungen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Bearbeitet									
max. Punktezahl	10	10	10	8	10	8	8	16	80
erreichte Punktezahl									
Korrektur									

Prüfergebnis/Note	

Elementare Zahlentheorie mit Maple (01202) **SoSe 2011**

Klausur am 10.09.2011:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Beweisen Sie, dass $\mathrm{ggT}(299, 247) = 13$ ist und finden Sie ganze Zahlen $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $13 = 299s + 247t$.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 2

Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Bestimmen Sie $\mathrm{ggT}(n, n + p)$.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei x eine Lösung von $X \equiv a(\mathrm{mod} m)$ und von $X \equiv b(\mathrm{mod} n)$ für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n > 1$ und $a, b \in \mathbb{Z}$. Sei $\mathrm{ggT}(m, n) = d$.

Beweisen Sie, dass $a \equiv b(\mathrm{mod} d)$ ist.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 4

Seien $a, c \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ mit $m > 1$ und $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$. Sei $x \in \mathbb{N}$ so, dass gilt:

$$x \equiv ca^{\varphi(m)-1}(\mathrm{mod} m).$$

Beweisen Sie, dass $ax \equiv c(\mathrm{mod} m)$ ist.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 5

Sei p eine Primzahl. Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass $a^{p-1} + b^{p-1} = c^{p-1}$ nur dann gilt, wenn p ein Teiler von abc ist.

Hinweis: Kleiner Satz von Fermat.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 6

Für alle $i \in \mathbb{N}$ bezeichne p_i die i-te Primzahl, also $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7, \ldots$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei $R_k = p_1 \cdots p_k + 1$.

Beweisen Sie, dass R_k niemals eine Quadratzahl ist.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 7

Seien $z, z' \in \mathbb{Z}[i]$. Beweisen Sie: Wenn z ein Teiler von z' ist, dann ist $N(z)$ ein Teiler von $N(z')$. Gilt die Umkehrung dieser Aussage?

[*8 Punkte*]

Aufgabe 8

Die folgende Maple-Prozedur soll bei der Eingabe von $a, b \in \mathbb{Z}$ entweder „nicht invertierbar“ ausgeben, wenn $a = b = 0$ gilt, oder zwei rationale Zahlen $x, y \in \mathbb{Q}$, sodass $x + iy \in \mathbb{C}$ das Inverse von $a + ib \in \mathbb{Z}[i]$ ist.

```
>  #Die Zeilennummerierung ist zu Ihrer Orientierung
1.  klausur:=proc(a::integer,b::integer)
2.      local x,y;
3.      if a^2+b^2=0 then
4.       print("nicht invertierbar");
5.       else x:= a/a^2+b^2;
6.        y:= -b/a^2+b^2;
7.        print(x,y);
8.     fi;
9.   end:
```

1. Vollziehen Sie die Arbeitsweise der Prozedur anhand der Eingabe $1 + i$, also $a = b = 1$ nach.
2. Wo liegt der Fehler in der Prozedur? (Hinweis: Maple gibt für die Prozedur keine Fehlermeldung aus.)
3. Schreiben Sie eine Prozedur „mult“, die bei Eingabe von ganzen Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ ausgibt, sodass $x + iy = (a + ib)(c + id)$ in $\mathbb{Z}[i]$ gilt.

[*4 + 4 + 8 = 16 Punkte*]