FernUniversität in Hagen

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität ·58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

FernUniversität in Hagen
FAKULTÄT für Mathematik und Informatik

KLAUSUR zum Kurs Elementare Zahlentheorie mit Maple (01202)
SoSe 2010

DATUM: 25.09.2010
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise

(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte das Adressfeld leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **40** Punkte erreichen.
5. Erlaubt sind der Studienbrief, die Einsendeaufgaben und die Musterlösungen der Einsendeaufgaben dieses Semesters. Persönliche Notizen in diesen Aufzeichnungen sind erlaubt.
6. Weitere Hilfsmittel wie Bücher oder Taschenrechner dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit 5 bewertet wird.

	Bemerkungen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Bearbeitet									
max. Punktezahl	10	10	10	8	6	8	8	20	80
erreichte Punktezahl									
Korrektur									

Prüfergebnis/Note	

Elementare Zahlentheorie mit Maple (01202) SoSe 2010

Klausur am 25.09.2010:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ beide ungerade. Beweisen Sie, dass 8 ein Teiler von $m^2 - n^2$ ist.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen n, für die $n^3 - 1$ eine Primzahl ist.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 3

Beweisen Sie: Sei p eine ungerade Primzahl. Dann gilt

$$1^{p-1} + 2^{p-1} + \cdots + (p-1)^{p-1} \equiv -1 (\mathrm{mod} p).$$

[*10 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$. Beweisen Sie, dass $\varphi(n)$ gerade ist.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 5

Seien $a, c \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass $(a, a+2, c)$ kein primitives pythagoreisches Tripel von $X^2 + Y^2 = Z^2$ sein kann. Finden Sie ein pythagoreisches Tripel der Form $(a, a+2, c)$.

[*6 Punkte*]

Aufgabe 6

Untersuchen Sie, ob 2010 Summe von zwei Quadraten ist.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 7

Sei $z \in \mathbb{Z}[i]$ eine Gauß'sche Primzahl. Beweisen Sie, dass $N(z) = p$ oder $N(z) = p^2$ für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$ ist.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 8

Der Maple-Befehl `ifactors` berechnet die Primfaktorzerlegung einer ganzen Zahl. Ist $a \in \mathbb{Z}$ und $a = \pm p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$, wobei die p_i verschiedene Primzahlen und $e_i \in \mathbb{N}$, also $e_i \geq 1$ für $1 \leq i \leq k$ sind, dann liefert der Befehl `ifactors(a);` eine geschachtelte Liste $[\pm 1, [[p_1, e_1], \ldots, [p_k, e_k]]]$. Der erste Eintrag der Liste ist also das Vorzeichen der Zahl a. Der zweite Eintrag ist wieder eine Liste. Diese besteht aus lauter zweielementigen Listen, bei denen der erste Eintrag eine Primzahl p_i und der zweite die Potenz e_i ist, mit der p_i in a vorkommt. Sie sehen hier zwei Beispiele:

```
> ifactors(-20);
```

$$[-1, [[2, 2], [5, 1]]]$$

```
> ifactors(36);
```

$$[1, [[2, 2], [3, 2]]]$$

Gegeben sei nun folgende Maple-Prozedur:

```
>   #Die Zeilennummerierung ist zu Ihrer Orientierung
1.   klausur:=proc(a::integer)
2.      local i,n,l;
3.      l:=ifactors(a);
4.      n:=nops(l[2]);
5.      p:=1;
6.      for i from 1 to n do
7.       p:=p*l[2][i][1]
8.      od;
9.      print(p);
10.   end:
```

1. Wenn Sie diese Prozedur in Maple eingeben, bekommen Sie eine Warnung. Wovor wird gewarnt und wie kann man das beheben?
2. Von nun an nehmen Sie an, dass Sie das Problem aus 1. behoben haben. Vollziehen Sie die Arbeitsweise der Prozedur an der Eingabe der Zahl 112 nach, deren Primfaktorzerlegung $112 = 2^4 \cdot 7$ ist.
3. Wie können Sie die Ausgabe der Prozedur allgemein für die Eingabe einer Zahl $a \neq 0, 1$ mit $a = \pm p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$ beschreiben?

4. Wie können Sie die Prozedur so verändern (ab Zeile 5), dass sie für $a = \pm p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$ die Ausgabe $e_1 + \ldots + e_k$ liefert?

[*6 + 5 + 3 + 6 = 20 Punkte*]