Beachten Sie bitte die Hinweise auf dem Deckblatt!

Aufgabe 1

Sei X eine nichtleere Menge und

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad d(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y, \\ 0, & \text{falls } x = y, \end{cases}$$

die *diskrete Metrik* aus dem Kurs.

5 Punkte (a) Zeigen Sie, dass d tatsächlich eine Metrik ist und dass d im Falle eines Vektorraums X mit $X \neq \{0\}$ nicht von einer Norm erzeugt wird.

2 Punkte (b) Bestimmen Sie $U_\varepsilon(x)$ für beliebiges $x \in X$ in den Fällen $0 < \varepsilon \leq 1$ und $\varepsilon > 1$. (Ein Beweis ist hier nicht verlangt.)

2 Punkte (c) Sei (x_k) eine Folge in X. Zeigen Sie, dass (x_k) genau dann konvergiert, wenn ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_k = x_{n_0}$ $(k \in \mathbb{N})$ existiert.

2 Punkte (d) Sei (Y, d_Y) ein weiterer metrischer Raum und $f : X \longrightarrow Y$ eine Funktion. Beweisen Sie, dass f stetig ist.

11 Punkte **Aufgabe 2**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}, & \text{falls } \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}, \\ 0, & \text{falls } \binom{x}{y} = \binom{0}{0}. \end{cases}$$

Untersuchen Sie jeweils, in welchen Punkten $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ die Funktion f stetig, partiell differenzierbar bzw. differenzierbar ist, und bestimmen Sie im Falle der partiellen Differenzierbarkeit bzw. Differenzierbarkeit die partielle Ableitung bzw. Ableitung.

7 Punkte **Aufgabe 3**

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, und die Folge (f_k) von Abbildungen $f_k : X \longrightarrow Y$ sei gleichmäßig konvergent gegen eine stetige Funktion $f : X \longrightarrow Y$. Ferner sei (x_k) eine konvergente Folge in (X, d_X) mit Grenzwert x. Zeigen Sie, dass $f_k(x_k) \longrightarrow f(x)$ für $k \longrightarrow \infty$ gilt. Formulieren Sie dazu zunächst den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz von (f_k) gegen f.

6 Punkte **Aufgabe 4**

Formulieren Sie für eine nichtleere, offene Teilmenge M von $\mathbb{R}^2$ und $f \in Abb(M, \mathbb{R})$ hinreichende Bedingungen für die Existenz eines lokalen Extremums (Minimums, Maximums) bzw. eines Sattelpunkts. (Vergessen Sie dabei nicht, die Voraussetzungen an f und f' aufzuschreiben.)

Aufgabe 5

(a) Formulieren Sie jeweils die Definition

1 Punkt (i) einer parametrisierten Kurve in $\mathbb{R}^n$,

3 Punkte (ii) einer Kurve in $\mathbb{R}^n$ und den Begriff der Äquivalenz zweier parametrisierter Kurven,

3 Punkte (iii) einer *glatten* Kurve in $\mathbb{R}^n$.

6 Punkte (b) Die Kurve $W = [\psi]$ sei gegeben durch

$$\psi : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \, , \; t \longrightarrow \binom{3 \cos (t+\pi)}{3 \sin (t+\pi)} \, ,$$

und es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \, , \; \binom{x}{y} \longrightarrow x^2 y \, .$$

Die Parameterdarstellung ψ ist glatt. (Diese Aussage muss nicht bewiesen werden!)

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int\limits_W f \, ds$ bezüglich der euklidischen Norm.

(Vergessen Sie dabei nicht, die Voraussetzungen für Ihr Vorgehen zu überprüfen!)

Hinweis: $(\cos^3)' = 3 \cos^2 (-\sin)$.

8 Punkte **Aufgabe 6**

Sei

$$G := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le 1 \text{ und } |y| \le x \right\} ,$$

und sei

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \, , \; \binom{x}{y} \longrightarrow f(x, y) := \chi_G(x, y) \, x \, y^2 \, .$$

Zeigen Sie, dass f Lebesgue–integrierbar ist, und berechnen Sie $\int f \, d\lambda_2$.

Hinweis: Beachten Sie $\chi_G(x, y) = \chi_{[0,1]}(x) \chi_{[-x,x]}(y)$ für alle $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$.