Lösung zu Aufgabe 1

(1) ⇒ (2): Dies ist Satz 4.5.13 der Vorlesung.

Sei $A \in \mathcal{R}$. Dann ist die Mengenfolge $A_1 = A$, $A_2 = A_3 = \ldots = \emptyset$ in $\mathcal{U}(A)$: $\{A_n\}_n \in \mathcal{U}(A)$. Somit gilt die Abschätzung

$$\mu^\star(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A) + 0 = \mu(A).$$

Sei nun anderseits $\{B_n\}_n \in \mathcal{U}(A)$. Da μ als Prämaß σ-subadditiv ist (Korollar 3.6.6), folgt

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n).$$

Dies gilt für beliebige Mengenfolgen $\{B_n\}_n \in \mathcal{U}(A)$. Also gilt die Abschätzung auch für das Infimum:

$$\mu(A) \leq \mu^\star(A) = \inf\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n);\ \{B_n\}_n \in \mathcal{U}(A)\Big\}.$$

Somit ist $\mu = \mu^\star$ auf $\mathcal{R}$.

(2) ⇒ (3): Sei $\{A_n\}_n$ eine Mengenfolge mit (nicht notwendigerweise disjunkten) Elementen $A_n \in \mathcal{R}$ mit $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$. Dann ist $\{A_n\} \in \mathcal{U}(A)$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_n A_n\right) &= \mu(A) \\
&= \mu^\star(A) \qquad \text{(nach Voraussetzung (2))} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).
\end{aligned}$$

Somit ist μ σ-subadditiv.

(Bemerkung: Richtung (1) ⇒ (3) ist die Aussage von Korollar 3.6.6.)

(3) ⇒ (1): Da μ nach Voraussetzung ein Inhalt ist, müssen wir zeigen, dass μ σ-additiv ist. Dann ist nach Definition μ ein Prämaß.

Nach Satz 3.6.5 gilt: „Sind die Mengen $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$ disjunkt und gilt $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{R}$, dann gilt $\mu(B) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$."

Nach (3) ist μ auch σ-subadditiv; es gilt also auch $\mu(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$.

Also ist μ σ-additiv und somit ist μ ein Prämaß.

Lösung zu Aufgabe 2

Zunächst berechnen wir $\lambda_2(H)$. Da H ein Halbkreis ist, ist sein Volumen die Hälfte eines ganzen Kreises, dessen Volumen in der Vorlesung berechnet wurde. Wir erhalten

$$\lambda_2(H) \;=\; \frac{1}{2}\lambda_2\big(B_1^{(2)}(0)\big) \;=\; \frac{1}{2}\pi 1^2 \;=\; \frac{\pi}{2}.$$

Betrachten wir nochmals die Menge H des Halbkreises. Wir haben

$$\begin{aligned} H &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1,\, y \geq 0\big\} \\ &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,| y \in [0,1],\, x^2 \leq 1 - y^2\big\} \\ &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,| y \in [0,1],\, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\big\}. \end{aligned}$$

Wir berechnen nun die Koordinaten der Schwerpunkts:

$$\begin{aligned} s_x &= \frac{2}{\pi}\int_H x\, d\lambda_2(x,y) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{\left\{\substack{0\leq y\leq 1 \\ -\sqrt{1-y^2}\leq x\leq\sqrt{1-y^2}}\right\}} x\, d\lambda_2(x,y) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{[0,1]}\int_{\left[-\sqrt{1-y^2},\sqrt{1-y^2}\right]} x\, d\lambda_1(x)\, d\lambda_1(y) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{[0,1]}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x\, dx\, d\lambda_1(y) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{[0,1]}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} d\lambda_1(y) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{[0,1]} 0\, d\lambda_1(y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} s_y &= \frac{2}{\pi}\int_H y\, d\lambda_2(x,y) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{[0,1]}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1\, dx\, d\lambda_1(y) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{[0,1]} 2y\sqrt{1-y^2}\, d\lambda_1(y) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^1 2y\sqrt{1-y^2}\, dy \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{2}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3\pi}. \end{aligned}$$

Somit hat der Schwerpunkt von H die Koordinaten

$$s = \left(0, \frac{4}{3\pi}\right).$$

Lösung zu Aufgabe 3

Hinweis zur Punktevergabe: Jede richtige Antwort wird mit +2 Punkten, jede falsche Antwort wird mit −2 Punkten bewertet. Keine Antwort werden mit 0 Punkte bewertet. Sie können jedoch insgesammt in dieser Aufgabe keine negative Punkte erziehlen.

Ein Beispiel: Sie haben 4 von 6 Fragen beantwortet, 1 richtig, 3 falsch. Sie erhalten daher $1 \times +2$ Punkte, $3 \times -2 = -6$ Punkte und $2 \times 0 = 0$ Punkte. Insgesammt wäre das −4 Punkte. Da Sie jedoch mindestens 0 Punkte für die Aufgabe bekommen, erhalten Sie für die gesammte Aufgabe 0 Punkte.

Bitte kreuzen Sie entweder „Richtig“ oder „Falsch“ an:

1. Jede Algebra ist eine σ-Algebra.

wahr	**falsch**
☐	XX

2. Jedes Maß ist ein äußeres Maß.

wahr	**falsch**
☐	XX

3. Jede Lebesgue-integrierbare Funktion ist Riemann-integrierbar.

wahr	**falsch**
☐	XX

4. Jede Borel-messbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ ist stetig.

wahr	**falsch**
☐	XX

5. Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge. Es gilt $\Omega \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

wahr	**falsch**
☐	XX

6. Sind $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ beliebige Maßräume, dann gibt es genau eine Fortsetzung von $\mu_1 \otimes \mu_2$ zu einem Maß auf die Produkt-σ-Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

wahr	**falsch**
☐	XX

Lösung zu Aufgabe 4

1. Nach Voraussetzung ist $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit gilt auch

$$0 \leq \chi_{[0,1]}\, f \leq \chi_{[0,2]}\, f \leq \dots,$$

da $\chi_{[0,n]} \leq \chi_{[0,n+1]}$ ist. Nach Definition von f_n gilt

$$\chi_{[0,n]}\, f = f_n.$$

Somit folgt direkt

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots .$$

2. Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_{[0,\infty)}(x)\, f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Also folgt

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\infty)} f(x)\, d\lambda(x) &= \int_{[0,\infty)} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, d\lambda(x) \\
&= \int \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, d\lambda(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\, d\lambda(x) \qquad \text{(Beppo Levi, Satz 5.4.27)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} f_n(x)\, d\lambda(x) \qquad \text{(Definition von } f_n\text{)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^n f_n(x)\, dx \qquad \text{(Satz 5.4.23, R-Int.=L-Int.)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^n f(x)\, dx \qquad \text{(Definition von } f_n\text{)} \\
&= \int_0^\infty f(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Da das Lebesgue-Integral $\displaystyle\int_{[0,\infty)} f(x)\, d\lambda(x)$ existiert, existiert auch das Riemann-Integral $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\, dx$ und es gilt Gleichheit.