FernUniversität in Hagen

Matrikelnummer **(unbedingt eintragen!)**

Postanschrift: FernUniversität, 58084 Hagen

Name:

Vorname:

Straße, Nr.:

PLZ, Wohnort:

Fakultät für Mathematik
und Informatik

Bitte zurück an:
FernUniversität in Hagen
58084 Hagen

Kurs: 01145 Maß- und Integrationstheorie, WS 2012/13

Einsendeaufgaben zur Probe– bzw. Musterklausur

Hinweise zur Bearbeitung (Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Beginnen Sie mit der Lösung einer Aufgabe stets auf einem neuen Blatt und versehen Sie dieses mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und der Nummer der Aufgabe.
2. Schreiben Sie bitte **deutlich** und **nicht** mit Bleistift.
3. Heften Sie zum Schluss dieses Deckblatt, die Aufgabenblätter und Ihre Lösungsblätter (nach Aufgaben sortiert) zusammen und kreuzen Sie in der Zeile „bearbeitet“ die von Ihnen bearbeiteten Aufgaben an.
4. Bei der Klausur sind **keine Hilfsmittel** wie Studienbriefe, Glossare, Bücher, Aufzeichnungen, Taschenrechner etc. zugelassen.
5. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie mindestens **24** Punkte erreicht haben.
6. Musterlösungen zur Probeklausur können Sie ca. 2 Wochen nach dem Bearbeitungsende in dem Kursbereich der virtuellen Universität und der Kurswebseite einsehen.

7. **Letzter Einsendetag: 21.01.2013 (Datum des Poststempels)**

Aufgabe	1	2	3	4	
bearbeitet:(bitte ankreuzen)					
erreichbare Punkte:	12	12	12	12	Summe: **48**
erreichte Punktezahl:					
Korrektor:					

Aufgabe 1

Sei M eine nichtleere Menge, $\mathcal{R}$ ein Ring über M und ν ein Inhalt auf $\mathcal{R}$. Wir bezeichnen mit $\mu^\star$ das äußere Maß zu μ.
Beweisen sie, dass die nachstehenden Aussagen äquivalent sind:

1. μ ist ein Prämaß,
2. $\mu = \mu^\star$ auf $\mathcal{R}$ und
3. μ ist σ-subadditiv.

Aufgabe 2

Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ eine kompakte Menge mit Volumen $\lambda_d(K) > 0$. Man nennt den Punkt $s = (s_1, \dots, s_d)$ mit

$$s_k := \frac{1}{\lambda_d(K)} \int_K x_k \, d\lambda_d\big((x_1, \dots, x_d)\big)$$

für alle $k = 1, \dots, d$ den *Schwerpunkt* von K.

Berechnen Sie den Schwerpunkt des Halbkreis

$$H = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\big\}.$$

Aufgabe 3

Hinweis zur Punktevergabe: Jede richtige Antwort wird mit +2 Punkten, jede falsche Antwort wird mit −2 Punkten bewertet. Keine Antwort werden mit 0 Punkte bewertet. Sie können jedoch insgesammt in dieser Aufgabe keine negative Punkte erziehlen.
Ein Beispiel: Sie haben 4 von 6 Fragen beantwortet, 1 richig, 3 falsch. Sie erhalten daher $1 \times +2$ Punkte, $3 \times -2 = -6$ Punkte und $2 \times 0 = 0$ Punkte. Insgesammt wäre das −4 Punkte. Da Sie jedoch mindestens 0 Punkte für die Aufgabe bekommen, erhalten Sie für die gesammte Aufgabe 0 Punkte.

Bitte kreuzen Sie entweder „Richtig“ oder „Falsch“ an:

1. Jede Algebra ist eine σ-Algebra.

   wahr ☐ **falsch** ☐

2. Jedes Maß ist ein äußeres Maß.

   wahr ☐ **falsch** ☐

3. Jede Lebesgue-integrierbare Funktion ist Riemann-integrierbar.

   wahr ☐ **falsch** ☐

4. Jede Borel-messbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ ist stetig.

   wahr ☐ **falsch** ☐

5. Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge. Es gilt $\Omega \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

   wahr ☐ **falsch** ☐

6. Sind $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ beliebige Maßräume, dann gibt es genau eine Fortsetzung von $\mu_1 \otimes \mu_2$ zu einem Maß auf die Produkt-σ-Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

   wahr ☐ **falsch** ☐

Aufgabe 4

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine positive Lebesgue-integrierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass für alle $A \geq 0 \quad \chi_{[0,A]} f$ beschränkt und Riemann-integrierbar ist. Desweiteren seien die Funktionen

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } 0 \leq x \leq n \text{ und} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.
Zeigen Sie:

1. $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$.
2. Das uneigentliche Riemann-Integral $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ existiert. Sein Wert ist durch das Lebesgue-Integral $\displaystyle\int_{[0,\infty)} f(x)\,d\lambda(x)$ gegeben.