Lösung zu Aufgabe 1

In der Aufgabenstellung ist kein Tippfehler. Es steht dort $\int_W f(x,y,x)\, d\lambda_3(x,y,z)$. *($z \mapsto f(x,y,x)$ ist konstant in z.) Falls jemand* $\int_W f(x,y,z)\, d\lambda_3(x,y,z)$ *berechnet hat, dadurch ist die Aufgabe nicht schwerer oder leichter geworden und wird ebenfalls ohne Punktabzug gewertet.*
Die Musterlösung berechnet das Integral $\int_W f(x,y,x)\, d\lambda_3(x,y,z)$. *Die Lösung für* $\int_W f(x,y,z)\, d\lambda_3(x,y,z)$ *ist analog durchzuführen.*
Für den zweiten Teil der Aufgabe gilt die gleiche Bemerkung für die Funktion g.

1. Die Funktion f ist als stetige Funktion Lebesgue-messbar. Sie ist Lebesgue-integrierbar, da

$$\big|f\big((x,y,x)\big)\big| = \big|xy^2x\big| = \big|x^2y^2\big| \le 1$$

für alle $(x,yz,) \in W$ gilt. Die Abschätzung

$$\begin{aligned}\int_W \big|f(x,y,x)\big|\, d\lambda_3(x,y,z) &\le \int_W 1\, d\lambda_3(x,y,z)\\ &= \lambda_3(W)\\ &= \lambda_1\big([0,1]\big)\cdot\lambda_1\big([-1,1]\big)\cdot\lambda_1\big([-1,0]\big)\\ &= 1\cdot 2\cdot 1 = 2\end{aligned}$$

folgt somit.

Wir können nun den Satz von Fubini (2x) anwenden und erhalten

$$
\begin{aligned}
&\int_W f(x,y,x)\,d\lambda_3(x,y,z)\\
&\quad= \int_{[0,1]} \left(\int_{[-1,1]\times[-1,0]} x^2y^2\,d\lambda_2(y,z) \right) d\lambda_1(x)\\
&\quad= \int_{[0,1]} \left(\int_{[-1,0]} \left(\int_{[-1,1]} x^2y^2\,d\lambda_1(y) \right) d\lambda_1(z) \right) d\lambda_1(x)\\
(\star)\quad &\quad= \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 x^2y^2\,dy \right) dz \right) dx\\
&\quad= \int_0^1 \left(\int_{-1}^0 \left[\frac{1}{3}x^2y^3\,dy \right]_{y=-1}^1 dz \right) dx\\
&\quad= \int_0^1 \left(\int_{-1}^0 \frac{2}{3}x^2\,dz \right) dx\\
&\quad= \int_0^1 \left[\frac{2}{3}x^2 z \right]_{z=-1}^0 dx\\
&\quad= \int_0^1 \frac{2}{3}x^2\,dx\\
&\quad= \left[\frac{2}{9}x^3 \right]_0^1\\
&\quad= \frac{2}{9}.
\end{aligned}
$$

Der Übergang zum Riemann-Integral in $(\star)$ ist zulässig, da der Integrand stetig und das Integrationsintervall kompakt sind. (Dann stimmen Riemann-Integral und Lebesgue-Integral überein.)

Somit gilt

$$\int_W f(x,y,x)\,d\lambda_3(x,y,z) = \frac{2}{9}.$$

2. Die Funktion g ist als stetige Funktion Lebesgue-messbar. Sie ist Lebesgue-integrierbar, da

$$\big|g\big((x,y,x)\big)\big| = \big|x^2y\big| \leq 1$$

für alle $(x,y,z)\in W$ gilt. Somit folgt die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
\int_W \big|g(x,y,x)\big|\,d\lambda_3(x,y,z) &\leq \int_W 1\,d\lambda_3(x,y,z)\\
&= \lambda_3(W)\\
&= \lambda_1\big([0,1]\big)\cdot\lambda_1\big([-1,1]\big)\cdot\lambda_1\big([-1,0]\big)\\
&= 1\cdot 2\cdot 1 = 2.
\end{aligned}
$$

Wir können nun den Satz von Fubini (2x) anwenden und erhalten

$$
\begin{aligned}
&\int_W g(x,y,x)\, d\lambda_3(x,y,z) \\
&\quad = \int_{[0,1]} \left(\int_{[-1,1]\times[-1,0]} x^2 y \, d\lambda_2(y,z) \right) d\lambda_1(x) \\
&\quad = \int_{[0,1]} \left(\int_{[-1,0]} \left(\int_{[-1,1]} x^2 y \, d\lambda_1(y) \right) d\lambda_1(z) \right) d\lambda_1(x) \\
(\star) \quad &\quad = \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 x^2 y \, dy \right) dz \right) dx \\
&\quad = \int_{[0,1]} \left(\int_{[-1,0]} \left(\int_{-1}^1 x^2 y \, dy \right) d\lambda_1(z) \right) d\lambda_1(x) \\
&\quad = \int_{[0,1]} \left(\int_{[-1,0]} \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \, dy \right]_{y=-1}^1 d\lambda_1(z) \right) d\lambda_1(x) \\
&\quad = \int_{[0,1]} \left(\int_{[-1,0]} 0 \, d\lambda_1(z) \right) d\lambda_1(x) \\
&\quad = \int_{[0,1]} 0 \, d\lambda_1(x) \\
&\quad = 0.
\end{aligned}
$$

Der Übergang zu den Riemann-Integralen in $(\star)$ ist zulässig, da die Integranden jeweils stetig und die Integrationsintervalle kompakt sind. (Dann stimmen jeweils Riemann-Integral und Lebesgue-Integral überein.)

Somit gilt

$$\int_W g(x,y,x)\, d\lambda_3(x,y,z) = 0.$$

Lösung zu Aufgabe 2

Wir schreiben die aufsteigende Mengenfolge $\big(M_j\big)_j$ um in eine Folge disjunkter Mengen:

$$A_1 := M_1, \qquad A_2 := M_2 \setminus M_1, \qquad A_3 := M_3 \setminus M_2, \quad \dots \quad A_j := M_j \setminus M_{j-1}$$

für alle $j = 2, 3, 4, \dots$. Es gilt nun

$$M_k = \bigcup_{j=1}^{k} A_j \qquad \text{und} \qquad A_i \cap A_l = \emptyset$$

für alle $i, k, l \in \mathbb{N}$ mit $i \neq l$.

Nach Definition des äußeren Maß $\mu^\star$ gilt

$$\begin{aligned} \mu^\star(A) &= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i);\ \{B_i\}_i \in \mathcal{U}(A)\right\} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \end{aligned}$$

(die A_j sind disjunkt und überdecken A)

$$\begin{aligned} &= \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j) \\ &= \lim_{k\to\infty} \mu(M_k), \end{aligned}$$

da aus der Konstruktion von A_j und der Additivität

$$\sum_{j=1}^{k} \mu(A_j) = \mu(M_k)$$

folgt.

Lösung zu Aufgabe 3

Hinweis zur Punktevergabe: Jede richtige Antwort wird mit +2 Punkten, jede falsche Antwort wird mit −2 Punkten bewertet. Keine Antwort werden mit 0 Punkte bewertet. Sie können jedoch insgesammt in dieser Aufgabe keine negative Punkte erziehlen.
Ein Beispiel: Sie haben 4 von 6 Fragen beantwortet, 1 richig, 3 falsch. Sie erhalten daher $1 \times +2$ Punkte, $3 \times -2 = -6$ Punkte und $2 \times 0 = 0$ Punkte. Insgesammt wäre das -4 Punkte. Da Sie jedoch mindestens 0 Punkte für die Aufgabe bekommen, erhalten Sie für die gesammte Aufgabe 0 Punkte.

Bitte kreuzen Sie entweder „Richtig“ oder „Falsch“ an:

1. Jede σ-Algebra ist ein durchschnittstabiles Dynkin-System.

wahr	**falsch**
XX	

2. Jedes Prämaß auf einem Ring $\mathcal{R}$ lässt sich eindeutig auf ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ fortsetzen.

wahr	**falsch**
	XX

3. Für jede stetige, Lebesgue-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und beliebige reelle Zahlen a, b mit $a < b$ gilt

$$\int_{[a,b]} f(x) d\lambda(x) = \int_a^b f(x)\, dx$$

wahr	**falsch**
XX	

4. Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ ist Borel-messbar.

wahr	**falsch**
XX	

5. Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge. Dann ist $\mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra.

wahr	falsch
XX	

6. Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei σ-endlich Maßräume.

   Es gibt genau eine Fortsetzung von $\mu_1 \otimes \mu_2$ zu einem Maß auf der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

wahr	falsch
XX	

Lösung zu Aufgabe 4

1. Wir betrachten drei Fälle: $x \leq 0$, $x \in (0,1]$ und $x > 1$.

   Für $x \leq 0$ oder für $x > 1$ gilt $x \notin A_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $f_n(x) = 0$ für alle n und die Isotoniebedingung ist trivialerweise erfüllt:

   $$0 = f_n(x) \leq f_{n+1}(x) = 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

   Betrachten wir den verbleibenden Fall $x \in (0,1]$: Es gibt genau ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \leq \frac{1}{x} < n_0 + 1$. Nach Konstruktion der Funktionenfolge gilt

   $$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für alle } n < n_0 \text{ und} \\ \frac{1}{x} & \text{für alle } n \geq n_0. \end{cases}$$

   Somit gilt.

   $$0 = f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_{n_0-1} < f_{n_0} = f_{n_0+1} = \ldots = \frac{1}{x}.$$

   Die Isotoniebedingung

   $$f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

   ist somit erfüllt. Wir haben

   $$\begin{aligned} \int f_n(x)\, d\lambda(x) &= \int \frac{1}{x} \cdot \chi_{\left[\frac{1}{n},1\right]}(x)\, d\lambda(x) \\ &= \int_{\left[\frac{1}{n},1\right]} \frac{1}{x}\, d\lambda(x) \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x}\, dx \qquad \left(\text{da } f_n \text{ auf } \left[\frac{1}{n}, 1\right] \text{ stetig}\right) \\ &= \Big[\log(x)\Big]_{\frac{1}{n}}^{1} \\ &= \log(1) - \log\left(\frac{1}{n}\right) = \log(n). \end{aligned}$$

   Für die Grenzfunktion

   $$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{falls } x \in (0,1] \text{ und} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt mit analogen Anmerkungen

$$\int f(x)\, d\lambda(x) = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \infty.$$

im Sinne der uneigentlichen Riemann-Integrale. Somit ist f nicht Lebesgue-integrierbar.

2. Die Funktionen f_n sind als Verkettung von stetigen Funktionen und Indikatorfunktionen messbarer Mengen wieder messbar. Außerdem ist $(f_n)_n$ isoton und nicht negativ (nach dem ersten Teil).

   Somit sind die Voraussetzungen vom Satz von Beppo Levi erfüllt.

3. Der Satz von Beppo Levi sagt nichts über die Integrierbarkeit der Grenzfunktion f aus. Die Vertauschung $\int \iff \lim$ ist in unserem Fall so zu verstehen:

$$\begin{aligned} & f \notin \mathcal{L}^1(\lambda) \\ \overset{\text{formale Notation}}{\iff} \quad & \int f(x)\, d\lambda(x) = \infty \\ \iff \quad & \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\, d\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \log(n) = \infty. \end{aligned}$$