FernUniversität in Hagen

Matrikelnummer **(unbedingt eintragen)**
Postanschrift: FernUniversität in Hagen, 58084 Hagen
NAME:
Vorname:
Straße, Nr.:
PLZ, Wohnort:
Geburtsdatum: Hörerstatus:

FAKULTÄT für
Mathematik und Informatik

Klausurort:

....

bitte eintragen

Kurs: 01145 Maß- und Integrationstheorie, WS 2012/2013

PRÜFUNGSKLAUSUR am 9. März 2013, 10 – 12 Uhr

Hinweise zur Bearbeitung (Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Füllen Sie das Deckblatt **komplett** und **gut leserlich** aus.
2. Beginnen Sie mit der Lösung einer Aufgabe stets auf einem neuen Blatt und versehen Sie dieses mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und der Nummer der Aufgabe.
3. Schreiben Sie bitte **deutlich** und **nicht** mit Bleistift.
4. Heften Sie zum Schluss dieses Deckblatt, die Aufgabenblätter und Ihre Lösungsblätter (nach Aufgaben sortiert) zusammen und kreuzen Sie in der Zeile 'bearbeitet' die von Ihnen bearbeiteten Aufgaben an.
5. Es sind **keine Hilfsmittel** wie Studienbriefe, Bücher, Aufzeichnungen, Taschenrechner etc. zugelassen.
6. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie mindestens 24 Punkte erreicht haben.
7. Über das Ergebnis werden Sie schriftlich unterrichtet. Gleichzeitig wird Ihnen eine Bescheinigung zur Vorlage beim Finanzamt zugestellt.
8. **Die Klausur ist Eigentum der FernUniversität. Klausuren, die nicht vollständig zurückgegeben werden, sind von Korrektur und Benotung ausgeschlossen.**

Aufgabe	1	2	3	4	
bearbeitet:(bitte ankreuzen)					
erreichbare Punkte:	12	12	12	12	Summe: **48**
erreichte Punktezahl:					

1. Prüfer: 2. Prüfer: Prüfergebnis/Note:

Aufgabe 1

Seien

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xy^2z$ und
- $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = xyz$

gegeben.
(Lebesgue)-integrieren Sie die Funktionen f und g über den Würfel $W := [0, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 0] \subset \mathbb{R}^3$. Mit anderen Worten: Berechnen Sie

1. $\displaystyle\int_W f(x, y, x)\, d\lambda_3(x, y, z)$ und
2. $\displaystyle\int_W g(x, y, x)\, d\lambda_3(x, y, z)$.

Aufgabe 2

Sei M eine nichtleere Menge und R ein Ring über M. Sei des Weiteren $\mu : R \to \overline{\mathbb{R}}$ ein Inhalt auf dem Ring R, $\mu^\star$ das äußere Maß zu μ und $A \subset M$ eine Teilmenge von der Grundmenge M. Zeigen Sie: Gibt es eine aufsteigende Mengenfolge $\big(M_j\big)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $M_j \in R$ für alle j und $A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} M_j$, dann gilt $\mu^\star(A) \leq \lim_j \mu\big(M_j\big)$.

Aufgabe 3

Hinweis zur Punktevergabe: Jede richtige Antwort wird mit +2 Punkten, jede falsche Antwort wird mit −2 Punkten bewertet. Keine Antwort werden mit 0 Punkte bewertet. Sie können jedoch insgesammt in dieser Aufgabe keine negative Punkte erziehlen.
Ein Beispiel: Sie haben 4 von 6 Fragen beantwortet, 1 richig, 3 falsch. Sie erhalten daher $1 \times +2$ Punkte, $3 \times -2 = -6$ Punkte und $2 \times 0 = 0$ Punkte. Insgesammt wäre das -4 Punkte. Da Sie jedoch mindestens 0 Punkte für die Aufgabe bekommen, erhalten Sie für die gesammte Aufgabe 0 Punkte.

Bitte kreuzen Sie entweder „Richtig“ oder „Falsch“ an:

1. Jede σ-Algebra ist ein durchschnittstabiles Dynkin-System.

   wahr ☐ **falsch** ☐

2. Jedes Prämaß auf ein Ring $\mathcal{R}$ lässt sich eindeutig auf ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ fortsetzen.

   wahr ☐ **falsch** ☐

3. Für jede stetige, Lebesgue-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und beliebige reelle Zahlen a, b mit $a < b$ gilt
$$\int_{[a,b]} f(x) d\lambda(x) = \int_a^b f(x)\, dx$$

   wahr ☐ **falsch** ☐

4. Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ ist Borel-messbar.

   wahr ☐ **falsch** ☐

5. Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge. Dann ist $\mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra.

   wahr ☐ **falsch** ☐

6. Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei σ-endlich Maßräume.

   Es gibt genau eine Fortsetzung von $\mu_1 \otimes \mu_2$ zu einem Maß auf der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

   wahr ☐ **falsch** ☐

Aufgabe 4

Sei die Mengenfolge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$A_n := \left[\frac{1}{n}, 1\right] \qquad\qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir betrachten die Funktionenfolge $\big(f_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto f_n(x) := \frac{1}{x} \cdot \chi_{A_n}(x).$$

1. Zeigen Sie, das die Funktionenfolge $(f_n)_n$ isoton ist
2. Berechnen Sie die Lebesgue-Integrale (falls existent)

   $$\int f_n(x)\, d\lambda(x) \quad (n \in \mathbb{N})$$

   und

   $$\int f(x)\, d\lambda(x),$$

   wobei f die punktweise Grenzfunktion $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ist.
3. Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen vom Satz von Beppo Levi (Satz der monotonen Konvergenz) erfüllt sind.

   (Hinweis: Sind die Funktionen überhaupt messbar?)
4. Begründen Sie, warum $f \notin \mathcal{L}^1(\lambda)$ nicht im Widerspruch zum Satz von Beppo Levi (Satz der monotonen Konvergenz) steht.