Lösung zu Aufgabe 1

a)

$$\begin{aligned}
F(y) &= \int_1^2 f(x,y)\,dx \\
&= \int_1^2 \frac{x-1}{xy}\,dx \\
&= \int_1^2 \frac{1}{y} - \frac{1}{y}\frac{1}{x}\,dx \\
&= \left[\frac{1}{y}x - \frac{1}{y}\log x\right]_1^2 \\
&= \frac{2}{y} - \frac{1}{y}\log 2 - \frac{1}{y} + \frac{1}{y}\log 1 \\
&= \frac{1}{y} - \frac{1}{y}\log 2.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_1^2 F(y)\,dy &= \int_1^2 \frac{1}{y} - \frac{1}{y}\log 2\,dy \\
&= [\log y - \log 2 \log y]_1^2 \\
&= \log 2 - \log 2 \log 2 - \log 1 + \log 2 \log 1 \\
&= \log 2(1 - \log 2).
\end{aligned}$$

c) Berechnen Sie

$$\begin{aligned}
&\int_{[1,2]\times[1,2]} f(x,y)\,d\lambda_2(x,y) \\
&= \int_{[1,2]} \left(\int_{[1,2]} f(x,y)\,d\lambda_1(x)\right) d\lambda_1(y) \\
&= \int_1^2 \left(\int_1^2 f(x,y)\,dx\right) dy \quad \text{(mit Fubini)} \\
&= \log 2(1-\log 2) \quad \text{mit b)}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
&\int_{[1,2]} \left(\int_{[1,2]} f(x,y)\,d\lambda_1(y)\right) d\lambda_1(x) \\
&= \int_{[1,2]\times[1,2]} f(x,y)\,d\lambda_2(x,y) \quad \text{(mit Fubini)} \\
&= \log 2(1-\log 2) \quad \text{mit c).}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2

(a ist der Beweis zu Korollar 3.6.7 aus dem Skript.)

a) $A \setminus B$ und B sind disjunkt. Also folgt

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu((A \setminus B) \cup B) \\ &= \mu(A \setminus B) + \mu(B), \quad \text{(Additivität von } \mu) \\ \Rightarrow \quad \mu(A \setminus B) &= \mu(A) - \mu(B). \end{aligned}$$

b) $\mu(B) = \infty$ impliziert $\mu(A) = \infty$, also „$\mu(A \setminus B) = \infty - \infty$“, aber „$\infty - \infty$“ ist nicht definiert.

c) Sei $\mathcal{R} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ und

$$\mu(A) = \begin{cases} \infty & \text{falls } 0 \in A \text{ und} \\ 0 & \text{falls } 0 \notin A \text{ ist.} \end{cases}$$

Für $A = \{0,1\}$ und $B = \{0\}$ gilt $B \subset A$. Somit gilt

$$\mu(A \setminus B) = \mu(\{1\}) = 0.$$

Aber

$$\mu(A) - \mu(B) = \mu(\{0,1\}) - \mu(\{0\}) = \infty - \infty$$

ist nicht definiert.

Lösung zu Aufgabe 3

1. f_n ist offensichtlich eine beschränkte Funktion, die bis auf den Punkt $x = 1$ stetig ist. Somit ist f_n Lebesgue-messbar. Da f_n durch die Lebesgue-integrierbaren Funktionen 0 und $\chi_{[0,1]}$ beschränkt ist, ist f_n selbst Lebesgue-integrierbar.

   Wir zeigen nun, dass f_n eine isotone Funktionenfolge ist:

   - Fall $x < 0$: Nach Definition gilt $f_n(x) = 0$ für alle n. Also gilt insbesondere $f_n(x) \leq f_m(x)$ für alle $n \leq m$.
   - Fall $x > 1$: auch in diesem Fall hängt $f_n(x) = 0$ nicht von n ab. Es gilt also auch $f_n(x) \leq f_m(x)$ für alle $n \leq m$.
   - Fall $x \in [0,1]$: Sei $n \leq m$. Dann gilt $f_n(x) = x^{\frac{1}{n}} \leq x^{\frac{1}{m}} = f_m(x)$.

   Somit ist f_n eine isotone Funktionenfolge.

   Da $\chi_{[-1,1]}$ eine integrierbare Funktion unabhängig von n ist, ist somit auch die Funktion $x \mapsto \chi_{[-1,1]}(x)\, f_n(x)$ isoton und integrierbar.

   Der Satz von B. Levi ist anwendbar. Wir erhalten

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} \chi_{[-1,1]}(x) \cdot f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (0,1], \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   als integrierbare Grenzfunktion. Desweitern gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_{[-1,1]} f_n(x)\, d\lambda_1(x) &= \lim_{n\to\infty} \int \chi_{[-1,1]}(x) \cdot f_n(x)\, d\lambda_1(x) \\
&= \int \lim_{n\to\infty} \chi_{[-1,1]}(x) \cdot f_n(x)\, d\lambda_1(x) \\
&= \int_{[-1,0]} 0\, d\lambda_1(x) + \int_{(0,1]} 1\, d\lambda_1(x) \\
&= 0 \cdot \lambda_1([-1,0]) + 1 \cdot \lambda_1((0,1]) \\
&= 0 + 1 = 1.
\end{aligned}$$

2. Laut Vorlesung (Kapitel 6) gilt

$$\lambda_2(M_n) = \int_{[-1,1]} f_n(x)\, d\lambda_1(x).$$

3. Da f_n isoton ist, folgt

$$\begin{aligned} M_n &= \{(x,y) \mid x \in [-1,1],\, 0 \le y \le f_n(x)\} \\ &\subset \{(x,y) \mid x \in [-1,1],\, 0 \le y \le f_m(x)\} \\ &= M_m. \end{aligned}$$

für alle $n \le m$. Insbesondere gilt auch

$$\bigcup_{n=1}^{m} M_n = M_m.$$

Laut Konstruktion als „Fläche unter dem Funktionsgrafen" ist M_n eine Borelmenge in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Da $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ eine σ-Algebra ist, ist auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ eine Borelmenge. Somit formen die M_n eine Mengenfolge, die isoton gegen $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ strebt.

Also gilt

$$\begin{aligned} \lambda_2\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n\right) &= \lim_{m\to\infty} \lambda_2\left(\bigcup_{n=1}^{m} M_n\right) \\ &= \lim_{m\to\infty} \lambda_2(M_m) \\ &= \lim_{m\to\infty} \int_{[-1,1]} f_m(x)\, d\lambda_1(x) \\ &= 1 \qquad \text{(ist oben bereits ausgerechnet).} \end{aligned}$$

Wir erhalten die Antwort

$$\lambda_2\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n\right) = 1.$$

Lösung zu Aufgabe 4

a) Das Mengensystem $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\{1,2\})$ ist als Potenzmenge von $\Omega = \{1,2\}$ automatisch eine σ-Algebra über Ω.

b) μ erfüllt die 3 Eigenschaften eines Inhalts:

1) $\mu(\emptyset) = 0$ nach Definition.
2) $\mu(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$.
3) Wir checken einfach alle Möglichkeiten der Additivität:

* $\mu(\emptyset \cup \{1\}) = \mu(\{1\}) = \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \mu(\emptyset) + \mu(\{1\})$,
* $\mu(\emptyset \cup \{2\}) = \mu(\{2\}) = \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \mu(\emptyset) + \mu(\{2\})$,
* $\mu(\emptyset \cup \{1,2\}) = \mu(\{1,2\}) = 1 = 0 + 1 = \mu(\emptyset) + \mu(\{1,2\})$,
* $\mu(\emptyset \cup \{1\} \cup \{2\}) = \mu(\{1,2\}) = 1 = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \mu(\emptyset) + \mu(\{1\}) + \mu(\{2\})$

und

* $\mu(\{1\} \cup \{2\}) = \mu(\{1,2\}) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \mu(\{1\}) + \mu(\{2\})$.

c) Da $\mathcal{A}$ nur endlich viele Elemente hat, ist die σ-Additivität von μ automatisch erfüllt. Also ist μ automatisch bereits ein Maß.

d) μ ist eine Wahrscheinlichkeitsmaß, da μ nach (c) bereits ein Maß ist und $\mu(\{1,2\}) = 1$ gilt.