Klausur Maß- und Integrationstheorie WiSe 11/12

Aufgabe 1

$f(x,y) = \frac{x-1}{xy}$

a) berechnen Sie $F(y) = \int_1^2 f(x,y)dx$

b) berechnen Sie $\int_{[1,2]x[1,2]} f(x,y)d\lambda_2(x,y)$

Hinweis: benutzen Sie den Satz von Fubini

c)Berechnen Sie

$\int_{[1,2]}(\int_{[1,2]} f(x,y)d\lambda_1(y))d\lambda_1(x)$

Aufgabe 2

Sei μ ein Inhalt auf dem Ring $\mathcal{R}$.

a) Beweisen Sie: Für $A, B \in \mathcal{R}, B \subset A, \mu(B) < \infty$ gilt:

$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$

b) warum müssen wir $\mu(B) < \infty$ fordern?

c) Geben Sie ein Gegenbeispiel an, wo die Aussage aus a) nicht gilt wenn $\mu(B) = \infty$.

Aufgabe 3

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n := \begin{cases} x^{1/n} & \text{wenn } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

wir betrachten die Menge $M_n := M_{f_n} = \{(x,y)|x \in [-1,1], 0 \leq y < f_n(x)\}$

a) berechnen Sie mit Hilfe des Satzes der monotonen Konvergenz $\lim_{n\to\infty} \int_{[-1,1]} f_n(x)d\lambda_1(x)$

Hinweis: Vergewissern sie sich dass Voraussetzungen erfüllt.

b) Stellen Sie $\lambda_2(M_n)$ als 1-dimensionales Lebesgue-Integral dar.

Hinweis: M_n als Fläche unter dem Funktionsgraphen.

c) Berechnen Sie $\lambda_2(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n)$.

Aufgabe 4 wie in der Probeklausur (Maß, Wahrscheinlichkeitsmaß..)