Klausur am 21.08.2010

Lösungsvorschläge zu den Klausuraufgaben

**Aufgabe 1**

Es sei $(X, \|\ \|)$ ein normierter Raum.

**(a)** [*Erreichbare Punkte: 2.*] Die Definitionen der Begriffe „Cauchyfolge" und „vollständiger" normierter Raum sind anzugeben:

Eine Folge $(x_k)$ in $X$ heißt **Cauchyfolge**, wenn die Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} : (k > n_0 \Longrightarrow \|x_k - x_{n_0}\| < \varepsilon)$$

erfüllt ist (vgl. 1.5.14).

Ein normierter Raum $(X, \|\ \|)$, in welchem jede Cauchyfolge konvergent ist, heißt **vollständig** (vgl. 1.5.17).

**(b)** [*Erreichbare Punkte: 2.*] Es ist ein Beispiel eines normierten Raumes anzugeben, der nicht vollständig ist:

Gemäß 1.5.19(iii) ist $(C([0, 1]), \|\ \|_1)$ mit $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|dt$ ein solcher Raum.

**(c)** [*Erreichbare Punkte: 4.*] Wir zeigen: Ist $\alpha \in \mathbb{K}$ und ist $(x_k)$ eine Cauchyfolge in $(X, \|\ \|)$, so ist auch das skalare Vielfache $\alpha(x_k) = (\alpha x_k)$ eine Cauchyfolge in $(X, \|\ \|)$.

Im Fall $\alpha = 0$ ist $(\alpha x_k)$ die konstante Folge $(0, 0, 0, \ldots)$, welche natürlich in $(X, \|\ \|)$ konvergent und somit (nach 1.5.15(i)) eine Cauchyfolge ist. Wir können also $\alpha \neq 0$ voraussetzen. Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Ist $(x_k)$ eine Cauchyfolge in $(X, \|\ \|)$, so gibt es nach der Definition (vgl. (a)) zu $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|x_k - x_{n_0}\| < \varepsilon' \quad \text{für alle natürlichen Zahlen } k > n_0.$$

Mit der positiven Homogenität der Norm $\|\ \|$ folgt daraus

$$\|(\alpha x_k) - (\alpha x_{n_0})\| = \|\alpha(x_k - x_{n_0})\| = |\alpha|\,\|x_k - x_{n_0}\| < |\alpha|\varepsilon' = \varepsilon \quad \text{für alle } k > n_0.$$

Dies bedeutet, dass $(\alpha x_k)$ eine Cauchyfolge in $(X, \|\ \|)$ ist.

**Aufgabe 2**

**(a)** [*Erreichbare Punkte: 4.*] Es seien $(X, \|\ \|_X)$ und $(Y, \|\ \|_Y)$ normierte Räume, $a \in M \subseteq X$ und $f \in Abb(M, Y)$. Wir beweisen:

$$f \text{ ist stetig in } a \iff$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in M : \left(\|x - a\|_X \leq \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_Y \leq \varepsilon\right).$$

Zunächst sei $f$ stetig in $a$, und es sei ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach dem $\varepsilon$–$\delta$ Kriterium 2.3.2 gibt es dazu ein $\delta' > 0$ mit $\|f(x) - f(a)\|_Y < \varepsilon$ für alle $x \in M$ mit $\|x - a\|_X < \delta'$. Wir setzen $\delta := \frac{\delta'}{2}$ und erhalten dann für $x \in M$ mit $\|x - a\|_X \le \delta < \delta'$ die Beziehung $\|f(x) - f(a)\|_Y < \varepsilon$, also insbesondere $\|f(x) - f(a)\|_Y \le \varepsilon$.
Nun gelte die Bedingung in der Behauptung. Die Stetigkeit von $f$ in $a$ zeigen wir mithilfe des $\varepsilon$–$\delta$ Kriteriums 2.3.2: Es sei dazu ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2}$ gibt es dann nach der Bedingung ein $\delta > 0$, und für $x \in M$ mit $\|x - a\|_X < \delta$, also insbesondere mit $\|x - a\|_X \le \delta$, erhalten wir $\|f(x) - f(a)\|_Y \le \varepsilon' < \varepsilon$.

**(b)** [*Erreichbare Punkte: 5.*] Es sei $a = \binom{a_1}{0} \in \mathbb{R}^2$, und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x + y}{\sqrt{|y|}}, & \text{falls } y \neq 0, \\ 0, & \text{falls } y = 0, \end{cases}$$

definiert. Wir zeigen, dass $f$ in $a$ nicht stetig ist.
Zunächst sei $a_1 \neq 0$. Wir betrachten die Folge

$$(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad x_k := \begin{pmatrix} a_1 - \frac{1}{k^2} \\ \frac{1}{k^2} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt offenbar

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \quad \text{und} \quad f(x_k) = \frac{a_1 - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k}} = k a_1.$$

Aus $a_1 \neq 0$ folgt, dass $(f(x_k))$ eine unbeschränkte Folge ist; insbesondere konvergiert sie nicht gegen $f(a)$. Also ist $f$ nach dem Folgenkriterium (vgl. 2.3.3) nicht stetig in $a$.
Nun sei $a_1 = 0$. Wir betrachten jetzt die Folge

$$(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad x_k := \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k^2} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \binom{0}{0} = a \quad \text{und} \quad f(x_k) = \frac{\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k}} = 1 + \frac{1}{k}.$$

Es folgt $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = 1 \neq f(0, 0)$. Also ist $f$ auch in $a = \binom{0}{0}$ unstetig.

## Aufgabe 3

Es seien $a \in M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f \in Abb(M, \mathbb{R}^m)$.

**(a)** [*Erreichbare Punkte: 3.*] Es ist die Definition des Begriffs „$f$ ist differenzierbar in $a$" zu formulieren (vgl. 3.5.1):

$f$ heißt **differenzierbar in** $a$, wenn $a$ ein innerer Punkt von $M$ ist und wenn es eine $(m, n)$ Matrix $A$ gibt mit

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - [f(a) + A(x - a)]}{\|x - a\|} = 0.$$

**(b)** [*Erreichbare Punkte: 3.*] Es sei $m := 1$. Es ist zu entscheiden, ob die folgende Aussage richtig ist, und die Antwort ist zu beweisen:

$$f \text{ differenzierbar in } a \text{ und } fg \text{ differenzierbar in } a \implies g \text{ differenzierbar in } a.$$

Diese Aussage ist falsch, wie das Beispiel $n := 1$, $M := \mathbb{R}$, $a := 0$, $f := 0$ und $g := |\,|$ zeigt: $f$ und $fg = 0$ sind differenzierbar in $0$, aber $g$ ist es nicht (vgl. 3.3.4).

## Aufgabe 4

**(a)** [*Erreichbare Punkte: 6.*] Der lokale Umkehrsatz (vgl. 4.1.2) ist zu formulieren:
Es seien $a \in M$, $M$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f : M \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Ist Rang $f'(a) = n$, so gibt es eine offene Umgebung $U$ von $a$ mit $U \subseteq M$ und eine offene Umgebung $V$ von $b := f(a)$ mit folgenden Eigenschaften:

**(i)** $f|_U$ ist injektiv, und es gilt $f(U) = V$.

**(ii)** Ist $g : V \to U$ die Umkehrfunktion von $f|_U$, so ist $g$ stetig differenzierbar auf $V$, und für jedes $y \in V$ ist $g'(y) = f'(x)^{-1}$, wenn $x := g(y)$ gesetzt wird.

**(b)** [*Erreichbare Punkte: 8.*] Die Funktion $f \in Abb(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ sei durch

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x^2 - xy^2 + 2y \\ \arctan(xy) \end{pmatrix} \quad \text{für } \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$$

gegeben. Wir zeigen, dass offene Umgebungen $U$ von $a := \binom{1}{1}$ und $V$ von $b := f(a)$ existieren, sodass $f|_U$ eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion $g : V \to U$ besitzt, und bestimmen $g'(b)$.
Nach dem lokalen Umkehrsatz müssen wir nachweisen, dass $f$ stetig differenzierbar ist mit Rang $f'(a) = 2$.
Die Koordinatenfunktion $f_1$ ist eine Polynomfunktion, und $f_2$ ist die Verknüpfung der differenzierbaren Funktion arctan mit einer Polynomfunktion; daher sind beide differenzierbar und damit auch $f$ (vgl. 3.5.7). Es gilt

$$\begin{aligned} D_1 f_1(x,y) &= 2x - y^2, \\ D_2 f_1(x,y) &= -2xy + 2, \\ D_1 f_2(x,y) &= \frac{y}{1 + x^2 y^2}, \\ D_2 f_2(x,y) &= \frac{x}{1 + x^2 y^2}. \end{aligned}$$

Da die partiellen Ableitungen stetig sind, ist $f$ stetig differenzierbar. Weiter erhalten wir

$$f'(a) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Da offenbar $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Treppennormalform von $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ist, gilt Rang $f'(a) = 2$. Damit folgt die Behauptung aus dem lokalen Umkehrsatz. Ferner gilt (vgl. (ii) in (a))

$$g'(b) = f'(a)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

wie man z. B. durch Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erhält.

## Aufgabe 5

[*Erreichbare Punkte: 7.*] Wir begründen, dass die durch

$$\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \ t \mapsto \varphi(t) := \begin{pmatrix} \cos^2 t \\ \cos t \sin t \end{pmatrix}$$

gegebene Kurve $W := [\varphi]$ rektifizierbar ist, und berechnen ihre Länge $L(W)$.

Da $W$ eine Kurve mit Anfangs- und Endpunkt ist und $\varphi$ auf $]0, 2\pi[$ differenzierbar ist mit

$$\dot\varphi(t) = \begin{pmatrix} -2\cos t \sin t \\ -\sin^2 t + \cos^2 t \end{pmatrix} \quad (t \in ]0, 2\pi[),$$

also mit stetiger Ableitung $\dot\varphi|_{]0,2\pi[}$, ist $W$ nach dem Satz über die Länge einer stetig differenzierbaren Kurve 6.2.5 genau dann rektifizierbar, wenn

$$\int_0^{2\pi} \|\dot\varphi(t)\|_2 \, dt$$

als (eventuell uneigentliches) Integral existiert. Nun ist $\dot\varphi$ sogar auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, 2\pi]$ stetig differenzierbar, sodass $\| \, \|_2 \circ \dot\varphi$ stetig (vgl. 2.3.12(iv)), also Riemann-integrierbar ist. Daher ist $W$ rektifizierbar, und nach 6.2.5 gilt für die Länge von $W$

$$\begin{aligned} L(W) &= \int_0^{2\pi} \|\dot\varphi(t)\|_2 \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2 t \sin^2 t + (-\sin^2 t + \cos^2 t)^2} \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2 t \sin^2 t + \sin^4 t - 2\sin^2 t \cos^2 t + \cos^4 t} \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^4 t + 2\sin^2 t \cos^2 t + \cos^4 t} \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\sin^2 t + \cos^2 t)^2} \, dt = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi. \end{aligned}$$

## Aufgabe 6

[*Erreichbare Punkte: 6.*] Wir stellen für jede der folgenden Aussagen fest, ob sie richtig oder falsch ist. Für jede richtige Antwort gibt es 1 Punkt. Von der Summe dieser Punkte wird für jede falsche Antwort 1 Punkt abgezogen. Ist das Ergebnis negativ, gibt es 0 Punkte.

(a) Eine reelle Folge, die nur divergente Teilfolgen besitzt, ist unbeschränkt.

(b) Ist $(X, \|\ \|)$ ein normierter Raum und ist $c \in ]0, \infty[$, dann ist die Abbildung $\|\ \|^* : X \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \|x\|^* := c\|x\|$ eine Norm auf $X$.

(c) Sind $a \in W \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^n$, ist $f \in Abb(M, \mathbb{R}^m)$ und ist $f|_W$ in $a$ stetig, so ist auch $f$ in $a$ stetig.

(d) Ist $a$ ein innerer Punkt von $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und ist $f \in Abb(M, \mathbb{R})$ in $a$ partiell differenzierbar, dann ist $f$ in $a$ stetig.

(e) Es gibt eine Funktion $f \in \mathcal{R}([-\pi, \pi])$, deren Fourierkoeffizienten alle 1 sind.

(f) Die Funktion $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi(t) := \begin{cases} \begin{pmatrix} t \cos \frac{\pi}{t} \\ t \sin \frac{\pi}{t} \end{pmatrix} & \text{für } 0 < t \leq 1, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

ist eine parametrisierte Kurve.

Es gilt:

| Aussage | |
|---|---|
| (a) | ist richtig |
| (b) | ist richtig |
| (c) | ist falsch |
| (d) | ist falsch |
| (e) | ist falsch |
| (f) | ist richtig |

Begründungen (diese wurden nicht von Ihnen verlangt):

(a) Dies gilt nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß 1.2.17(ii).

(b) Dies folgt sofort aus den definierenden Eigenschaften einer Norm (vgl. 1.4.1).

(c) Es sei z. B. $n := m := 1$, $a := 0$, $W := [0, \infty[$, $M := \mathbb{R}$, $f(x) := 0$ für $x < 0$ und $f(x) := 1$ für $x \geq 0$.

(d) Siehe 3.6.2(2) und die Erläuterung im Anschluss an den Beweis von 3.6.3.

(e) Nach 5.4.7 (Besselsche Ungleichung) sind die Folgen der Fourierkoeffizienten Nullfolgen.

(f) Siehe die Lösung zu Ü 6.2.2.