Matrikelnummer

Postanschrift: FernUniversität in Hagen, 58084 Hagen

Vorname Name:

Straße Nr.:

PLZ Wohnort:

ggf. Ausland:

FernUniversität in Hagen

Fakultät für
Mathematik und Informatik

ϕ

Kurs: 01144 Analysis
Klausur am ?? von 10 bis 12 Uhr

Hinweise zur Bearbeitung:

1. Füllen Sie das Deckblatt aus.
2. Beginnen Sie mit der Lösung einer Aufgabe stets auf einem neuen Blatt, und versehen Sie dieses mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und der Nummer der Aufgabe.
3. Schreiben Sie bitte deutlich, und lassen Sie einen **mindestens 5 cm breiten Rand**.
4. Heften Sie zum Schluss dieses Deckblatt, die Aufgabenstellung und Ihre Lösungsblätter (nach Aufgaben sortiert) zusammen, und kreuzen Sie in der Zeile „bearbeitet" die von Ihnen bearbeiteten Aufgaben an.
5. Sie dürfen die Ergebnisse der jeweils vorausgehenden Aufgaben und Teilaufgaben verwenden, auch wenn Sie diese nicht gelöst haben.
6. *Es sind keine Hilfsmittel wie Studienbriefe, Bücher, Aufzeichnungen, Taschenrechner etc. zugelassen.*
7. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie mindestens 22 Punkte erreichen.
8. Über das Ergebnis der Klausur werden Sie schriftlich unterrichtet. Eine Bescheinigung für das Finanzamt wird Ihnen zugeschickt.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
bearbeitet							
erreichbare Punkte	5	10	10	10	8	7	50
Punkte							

1. Prüfer: 2. Prüfer: Klausurnote:

Beachten Sie bitte die Hinweise auf dem Deckblatt!

Aufgabe 1

Es seien $a \in \mathbb{R}^n$, eine Folge (x_k) in $\mathbb{R}^n$ und eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ gegeben; $\| \ \|$ sei eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

2 Punkte (a) Drücken Sie die Aussage „$x_k \longrightarrow a$ für $k \longrightarrow \infty$ in $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$" mithilfe des Begriffs „Umgebung" aus, und geben Sie die Definition der Aussage „U ist eine Umgebung von a in $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$" an.

3 Punkte (b) Nun seien $n := 2$ und $x_k := {}^t\!\left(\sum\limits_{j=0}^{k} 2^{-j}, \frac{3k^2+1}{4k^2-3}\right)$. Gibt es ein $a \in \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft „$x_k \longrightarrow a$ für $k \longrightarrow \infty$ in $(\mathbb{R}^2, \| \ \|)$"? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2

Es seien $a \in M \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}$ seien je mit einer Norm versehen.

2 Punkte (a) Geben Sie eine Formulierung des Folgenkriteriums, das die Stetigkeit von f in a charakterisiert.

8 Punkte (b) Nun seien $M := \mathbb{R}^2$ und f durch

$$f(x,y) := \begin{cases} y \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

definiert. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist f in $a := \binom{0}{\alpha}$ stetig?
(Formulieren Sie Ihre Antwort, und beweisen Sie sie.)

Aufgabe 3

2 Punkte (a) Es sei a ein innerer Punkt von $M \subseteq \mathbb{R}^n$, und es sei $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Welche Beziehung besteht zwischen den Aussagen „f ist in a differenzierbar" und „f ist in a partiell differenzierbar", und wie hängen gegebenenfalls die Ableitung $f'(a)$ und die partiellen Ableitungen $D_1 f(a), \ldots, D_n f(a)$ miteinander zusammen?

8 Punkte (b) Es sei $M := \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0, z > 0\}$, und $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x,y,z) := \sin(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{yz}$$

definiert. Begründen Sie, warum f in jedem Punkt ${}^t(x,y,z) \in M$ differenzierbar ist, und berechnen Sie $f'(\sqrt{\frac{3\pi}{2} - 2}, 1, 1)$.

Aufgabe 4

Die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei durch

$$F(x,y) := \begin{pmatrix} \arctan(x^2y) \\ \ln(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

gegeben.

7 Punkte **(a)** Begründen Sie, warum es eine offene Umgebung U von $\binom{1}{0}$ (in $\mathbb{R}^2$) gibt, sodass $F|_U$ invertierbar ist mit einer stetig differenzierbaren Umkehrfunktion $(F|_U)^{-1} : F(U) \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

3 Punkte **(b)** Berechnen Sie für $g := (F|_U)^{-1}$ die Ableitung $g'(b)$, wenn $b := F(1,0)$ ist.

Hinweis: $\arctan' t = \frac{1}{1+t^2}$.

8 Punkte **Aufgabe 5**

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x,y) := x^3 + y^3 - 3xy + 2$ gegeben.

Bestimmen Sie alle Stellen, in denen f lokale Extrema oder Sattelpunkte hat, und entscheiden Sie im Fall der lokalen Extrema, ob ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum vorliegt.

Aufgabe 6

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei durch $f(x,y) := \binom{y}{-x}$, die Kurve $W_1 = [\varphi_1]$ durch $\varphi_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longrightarrow \varphi_1(t) := \binom{t}{t^2}$ und die Kurve $W_2 = [\varphi_2]$ durch $\varphi_2 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longrightarrow \varphi_2(t) := \binom{t^2}{t}$ gegeben.

5 Punkte **(a)** Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{W_1} f \cdot d\binom{x}{y} \quad \text{und} \quad \int_{W_2} f \cdot d\binom{x}{y}.$$

2 Punkte **(b)** Besitzt f eine Stammfunktion? (Begründen Sie Ihre Antwort.)