Aufgabe 1.

5 Punkte Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach n. Für $n = 0$ gilt

$$\sum_{k=1}^{0} k^3 = 0 = \left(\frac{0 \cdot (0+1)}{2}\right)^2.$$

Damit ist die Verankerung erbracht.

Sei nun $n > 0$ und die Behauptung bereits für $n-1$ bewiesen, d.h. es gelte

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2. \tag{IV}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=1}^{n-1} k^3 + n^3 \\
&\overset{(IV)}{=} \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2 + n^3 \\
&= \frac{n^2(n-1)^2}{4} + n^3 \\
&= \frac{n^4 - 2n^3 + n^2}{4} + \frac{4}{4}n^3 \\
&= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,
\end{aligned}$$

d.h. die Behauptung gilt auch für n.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt sie für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2.

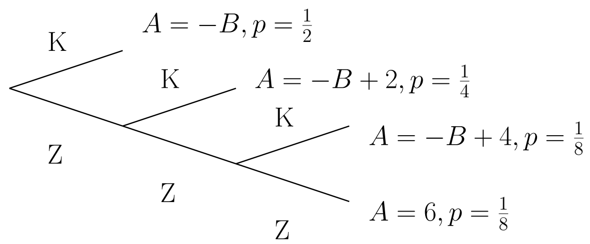
Sie spielen das folgende Spiel mit einem Spielmacher: Eine faire Münze wird geworfen. Zeigt diese Kopf, so müssen Sie B Euro bezahlen und das Spiel endet sofort. Zeigt die Münze Zahl, so zahlt der Spielmacher 2 Euro an Sie und das Spiel wird wiederholt, sofern die Münze nicht bereits dreimal geworfen wurde. Nach dreimaligem Werfen der Münze und der zugehörigen Auszahlung endet das Spiel auf jeden Fall.

4 Punkte (a) Sei $B = 4$. Was ist Ihr erwarteter Gewinn bzw. Verlust bei dem Spiel?

4 Punkte (b) Wie muss der Betrag B gewählt werden, so dass Sie im Erwartungswert weder Gewinn noch Verlust machen?

Lösungsvorschlag:

zu (a) und (b): Das Spiel lässt sich an folgendem Wahrscheinlichkeitsbaum veranschaulichen, wobei K für Kopf und Z für Zahl steht und die Blätter jeweils mit Auszahlung A und Wahrscheinlichkeit p versehen sind:



Daraus ergibt sich als Erwartungswert E_B für die Auszahlung

$$E_B = \frac{1}{2} \cdot (-B) + \frac{1}{4} \cdot (-B+2) + \frac{1}{8} \cdot (-B+2+2) + \frac{1}{8} \cdot (2+2+2) = -\frac{7}{8}B + \frac{7}{4}.$$

zu (a): Falls $B = 4$ ist, so gilt also

$$E_B = -\frac{7}{8}B + \frac{7}{4} = -\frac{7}{8} \cdot 4 + \frac{7}{4} = \frac{7}{4} - \frac{7}{2} = -\frac{7}{4} = -1.75.$$

Im Mittel verlieren Sie also 1€ und 75 Cent.

zu (b): 1. Lösungsmöglichkeit:

Der Betrag B muss so gewählt werden, dass $E_B = 0$ ist, d.h. es muss gelten

$$-\frac{7}{8}B + \frac{7}{4} = 0,$$

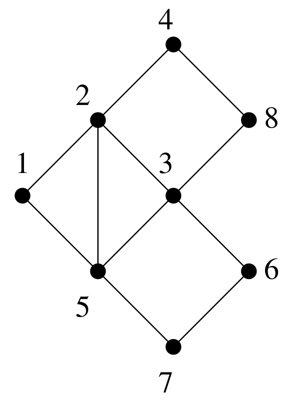
was äquivalent zu $B = 2$ ist. Falls $B = 2$ ist, so ist das Spiel also ausgewogen.

2. Lösungsmöglichkeit:

Wir spalten das Spiel in Einzelspiele, die aus jeweils einem Wurf bestehen, auf. Dann ist der Erwartungswert des Spiels die Summe der Erwartungswerte der Einzelspiele. Das Spiel ist also insbesondere ausgewogen, wenn jedes Einzelspiel ausgewogen ist. Wenn bei jedem Einzelspiel der Gewinn bei Zahl so hoch wie der Verlust bei Kopf ist, so ist das Einzelspiel, da Zahl und Kopf gleichwahrscheinlich sind, ausgewogen. Dies ist der Fall, wenn $B = 2$ gilt.

Aufgabe 3.

Betrachten Sie den im Folgenden abgebildeten Graphen $G = (V,E)$:



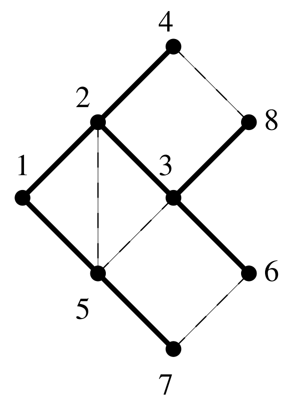
2 Punkte (a) Bestimmen Sie den Breitensuchbaum T von G startend bei Knoten 1, wobei von den unbesuchten Nachbarn eines Knotens immer zuerst jene mit der kleinstmöglichen Nummer hinzugenommen werden.

Lösungsvorschlag:

Die Warteschlange nach den einzelnen Schritten des BFS-Verfahrens ist wie folgt:

$$1, 25, 534, 347, 4768, 768, 68, 8, \emptyset$$

Als Breitensuchbaum ergibt sich:



2 Punkte (b) Zeigen Sie, dass G eulersch ist, und geben Sie eine Eulertour von G, startend von Knoten 1, an.

Lösungsvorschlag:

G ist eulersch, da G zusammenhängend ist und nur Knoten von den Graden 2 und 4 enthält.

Eine Eulertour finden wir wie folgt, indem wir immer zu den Knoten mit kleinstem Index voranschreiten. Zunächst finden wir den Kreis

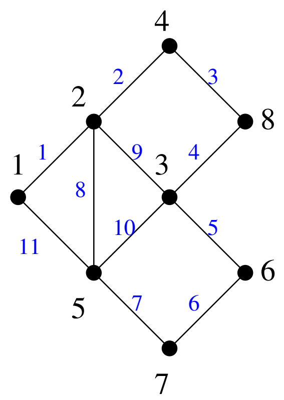
$$1 - 2 - 3 - 5 - 1.$$

Am Knoten 2 finden wir den weiteren Kreis

$$2-4-8-3-6-7-5-2.$$

Zusammengesetzt ergibt sich die Eulertour

$$1-2-4-8-3-6-7-5-2-3-5-1.$$



3 Punkte (c) Versehen Sie den Graph G mit Kantengewichten $1, 2, 3, \ldots, 11$ in der Reihenfolge des Durchlaufs der Kanten in der Eulertour aus (b) und bestimmen Sie einen minimalen aufspannenden Baum dieses gewichteten Graphen.

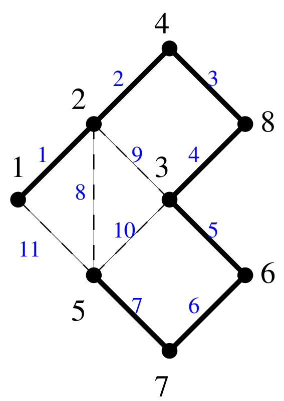
Lösungsvorschlag:

Wir listen alle 24 Lösungsmöglichkeiten, abhängig von der gefundenen Eulertour aus (b), in Tabelle 1 auf.

Die Eulertour, die wir in (b) angegeben haben, ist die Nr. 8. Dazu bestimmen wir den minimalen aufspannenden Baum, indem wir nach dem Verfahren von Kruskal alle Kanten, beginnend von der kleinsten, in aufsteigender Gewichtsreihenfolge durchgehen und sie hinzunehmen, wenn sie keinen Kreis schließen. Es ergibt sich Somit der Baum, bestehend aus den Kanten

$$12, 24, 48, 83, 36, 67, 75,$$

der in Folgenden abgebildet ist.

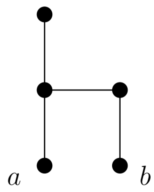


Nr.	Eulertour	MST
1	$1-2-3-5-2-4-8-3-6-7-5-1$	$12, 23, 35, -, 24, 48, -, 36, 67, -, -$
2	$1-2-3-6-7-5-2-4-8-3-5-1$	$12, 23, 36, 67, 75, -, 24, 48, -, -, -$
3	$1-2-3-6-7-5-3-8-4-2-5-1$	$12, 23, 36, 67, 75, -, 38, 84, -, -, -$
4	$1-2-3-8-4-2-5-3-6-7-5-1$	$12, 23, 38, 84, -, 25, -, 36, 67, -, -$
5	$1-2-3-8-4-2-5-7-6-3-5-1$	$12, 23, 38, 84, -, 25, 57, 76, -, -, -$
6	$1-2-4-8-3-2-5-3-6-7-5-1$	$12, 24, 48, 83, -, 25, -, 36, 67, -, -$
7	$1-2-4-8-3-5-7-6-3-2-5-1$	$12, 24, 48, 83, 35, 57, 76, -, -, -, -$
8	$1-2-4-8-3-6-7-5-2-3-5-1$	$12, 24, 48, 83, 36, 67, 75, -, -, -, -$
9	$1-2-4-8-3-6-7-5-3-2-5-1$	$12, 24, 48, 83, 36, 67, 75, -, -, -, -$
10	$1-2-5-3-2-4-8-3-6-7-5-1$	$12, 25, 53, -, 24, 48, -, 36, 67, -, -$
11	$1-2-5-7-6-3-2-4-8-3-5-1$	$12, 25, 57, 76, 63, -, 24, 48, -, -, -$
12	$1-2-5-7-6-3-8-4-2-3-5-1$	$12, 25, 57, 76, 63, 38, 84, -, -, -, -$
$\overline{12}$	$1-5-3-2-4-8-3-6-7-5-2-1$	$15, 53, 32, 24, 48, -, 36, 67, -, -, -$
$\overline{11}$	$1-5-3-8-4-2-3-6-7-5-2-1$	$15, 53, 38, 84, 42, -, 36, 67, -, -, -$
$\overline{10}$	$1-5-7-6-3-8-4-2-3-5-2-1$	$15, 57, 76, 63, 38, 84, 42, -, -, -, -$
$\overline{9}$	$1-5-2-3-5-7-6-3-8-4-2-1$	$15, 52, 23, -, 57, 76, -, 38, 84, -, -$
$\overline{8}$	$1-5-3-2-5-7-6-3-8-4-2-1$	$15, 53, 32, -, 57, 76, -, 38, 84, -, -$
$\overline{7}$	$1-5-2-3-6-7-5-3-8-4-2-1$	$15, 52, 23, 36, 67, -, -, 38, 84, -, -$
$\overline{6}$	$1-5-7-6-3-5-2-3-8-4-2-1$	$15, 57, 76, 63, -, 52, -, 38, 84, -, -$
$\overline{5}$	$1-5-3-6-7-5-2-4-8-3-2-1$	$15, 53, 36, 67, -, 52, 24, 48, -, -, -$
$\overline{4}$	$1-5-7-6-3-5-2-4-8-3-2-1$	$15, 57, 76, 63, -, 52, 24, 48, -, -, -$
$\overline{3}$	$1-5-2-4-8-3-5-7-6-3-2-1$	$15, 52, 24, 48, 83, -, 57, 76, -, -, -$
$\overline{2}$	$1-5-3-8-4-2-5-7-6-3-2-1$	$15, 53, 38, 84, 42, -, 57, 76, -, -, -$
$\overline{1}$	$1-5-7-6-3-8-4-2-5-3-2-1$	$15, 57, 76, 63, 38, 84, 42, -, -, -, -$

Tabelle 1: Minimal aufspannende Bäume zu dem gemäß Eulertour gewichteten Graphen G in Abhängigkeit von der Eulertour

Aufgabe 4.

Betrachten Sie den im Folgenden abgebildeten Graphen $H = (V, E)$, den sogenannten *Stuhl*:

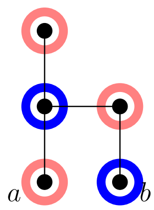


1 Punkt (a) Zeigen oder widerlegen Sie: H ist bipartit.

Lösungsvorschlag:

1. Lösungsmöglichkeit:

Wir zeigen, dass H bipartit ist.



Die abgebildete Partition der Knoten in eine Menge von rosa Knoten und eine Menge von blauen Knoten ist eine Bipartition.

2. Lösungsmöglichkeit:

Der Graph H ist bipartit, da H keine Kreise hat.

1 Punkt (b) Zeigen oder widerlegen Sie: H ist 2-zusammenhängend.

Lösungsvorschlag:

Der Graph H ist nicht 2-zusammenhängend, da z.B. der Nachbarknoten von a ein Schnittknoten ist, dessen Entfernung einen nicht zusammenhängenden Graphen (mit drei Zusammenhangskomponenten) erzeugt.

1 Punkt (c) Zeigen oder widerlegen Sie: H ist eulersch.

Lösungsvorschlag:

Der Graph H ist nicht eulersch, da $\deg(a) = 1 \notin 2\mathbb{Z}$.

3 Punkte (d) Bestimmen Sie die Anzahl der Spaziergänge der Länge 8 in H von a nach b.

Lösungsvorschlag:

1. Lösungsmöglichkeit:

Nach (a) ist H bipartit. a und b liegen in verschiedenen Farbklassen. Daher hat jeder Spaziergang von a nach b ungerade Länge. Somit gibt es keinen Spaziergang der Länge 8 von a nach b. Die gesuchte Anzahl ist also 0.

2. Lösungsmöglichkeit:

Eine Adjazenmatrix von H lautet (wobei wir die Knoten von oben nach unten und in einer Zeile von links nach rechts ordnen)

$$A_H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$A_H^2 = A_H A_H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$A_H^4 = A_H^2 A_H^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$A_H^8 = A_H^4 A_H^4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 0 & 48 & 34 & 0 \\ 0 & 116 & 0 & 0 & 48 \\ 48 & 0 & 68 & 48 & 0 \\ 34 & 0 & 48 & 34 & 0 \\ 0 & 48 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Die Anzahl der Spaziergänge der Länge 8 von a nach b lesen wir ab als

$$\left(A_H^8\right)_{4,5} = 0.$$

1 Punkt (e) Geben Sie ein maximales Matching in H an und beweisen Sie seine Maximalität.

Lösungsvorschlag:

Ein maximales Matching besteht etwa aus den beiden mit a bzw. b inzidenten Kanten.

Dieses ist maximal, denn H hat nur 5 Knoten, somit hat jedes Matching höchstens $\left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 2$ Kanten.

3 Punkte (f) Zeigen Sie: Jeder Graph mit Valenzsequenz $(3,2,1,1,1)$ ist isomorph zu H.

Lösungsvorschlag:

Sei G_0 ein Graph mit Valenzsequenz $(3,2,1,1,1)$. Angenommen, der Knoten mit Grad 3 ist adjazent zu den drei Knoten mit Grad 1. Dann gibt es keine zwei Knoten mit noch nicht ausgefülltem Knotengrad, mit denen der Knoten vom Grad 2 verbunden werden könnte. Also ist die Annahme falsch und der Knoten vom Grad 3 muss mit dem Knoten vom Grad 2 und zwei Knoten vom Grad 1 verbunden sein. Der Knoten vom Grad 2 muss dann desweiteren mit dem dritten Knoten vom Grad 1 verbunden sein. Also sind alle Graphen mit Valenzsequenz $(3,2,1,1,1)$ isomorph. Da H die Valenzsequenz $(3,2,1,1,1)$ hat, sind also insbesondere G_0 und H isomorph.

5 Punkte (g) Für welche $n \in \mathbb{N}$ existiert ein Graph mit Valenzsequenz

$$(3,2,\underbrace{1,1,1,\ldots,1}_{n \text{ Einsen}})?$$

Beweisen Sie Ihre Aussage.

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen: Solch ein Graph exisiert genau dann, wenn $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $n \geq 3$ ist.

Falls $n = 1$ ist, so gibt es keinen Graphen mit der Valenzsequenz $(3,2,1)$, da für einen Knoten mit Grad 3 der Graph mindestens 4 Knoten haben müsste.

Falls n gerade ist, so ist die Summe der Einträge Sequenz $(3,2,1,1,\ldots,1)$ gleich $3+2+n$, was eine ungerade Zahl ist. Nach dem Handshakelemma ist aber die Summe der Knotengrade in einem Graphen immer gerade. Somit kann die Sequenz keine Valenzsequenz sein.

Falls n ungerade ist und $n \geq 3$, so führen wir Induktion über $k \geq 1$ mit $n = 2k+1$. Die Verankerung $k = 1$ wurde in (f) mitbewiesen: H hat die Valenzsequenz $(3,2,1,1,1)$. Sei nun $k > 1$ und die Behauptung für $k-1$ bereits bewiesen. Dann gibt es nach Induktionsvoraussetzung einen Graphen mit Valenzsequenz

$$(3,2,\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2k-1 \text{ Einsen}}).$$

Fügt man diesem eine Komponente hinzu, die nur aus einem K_2 besteht, so entsteht ein Graph mit einem Knoten vom Grad 3, einem vom Grad 2 und genau $2k-1+2 = 2k+1 = n$ Einsen.

Aufgabe 5.

3 Punkte Sei $G = (V,E)$ ein kreisfreier Graph mit $|E| \geq 1$, bei dem für alle Knoten $v \in V$ gilt:

$$\deg(v) \leq 2.$$

Zeigen Sie, dass G ein Blatt enthält.

Lösungsvorschlag:

1. Lösungsmöglichkeit:

Angenommen, für alle Knoten $v \in V$ gilt $\deg(v) \in \{0,2\}$.

Da $|E| \geq 1$ ist, gibt es eine Kante $v_0 v_1$. Nach Annahme muss gelten $\deg(v_1) = 2$, also gibt es einen von v_0 und v_1 verschiedenen Knoten v_2, der zu v_1 benachbart ist. Per Induktion zeigt man, dass es aus gleichem Grund eine unedliche Folge von Knoten

$$v_0 v_1 v_2 \dots v_k \dots$$

gibt, so dass v_i zu v_{i-1} und zu v_{i+1} benachbart ist für alle $i \geq 1$. Da der Graph endlich ist, muss es ein k geben, so dass v_k ein früherer Knoten v_i der Folge ist mit $i \leq k-2$. Da außer v_0 alle Knoten v_i $(i \leq k-2)$ der Folge bereits zwei Nachbarn in der Folge haben, muss gelten $v_k = 0$. Damit ist die endliche Teilfolge

$$v_0 v_1 \dots v_{k-1} v_0$$

ein Kreis in G, im Widerspruch zur Vorausgesetzten Kreisfreiheit von G.

Somit ist die Annahme falsch und es gibt ein Blatt in G.

2. Lösungsmöglichkeit:

Ein kreisfreier Graph ist ein Graph, in dem jede Komponente ein Baum ist.

Da es eine Kante gibt, gibt es eine Komponente mit mindestens 2 Knoten.

Nach einem Satz der Vorlesung hat ein Baum mit mindestens 2 Knoten ein Blatt.

Somit hat G ein Blatt.

Aufgabe 6.

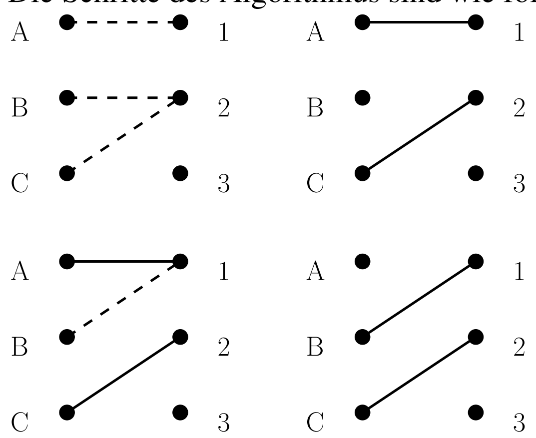
5 Punkte Gegeben sind eine Menge $U = \{A,B,C\}$ von Männern und $V = \{1,2,3\}$ von Frauen. Diesen sind jeweils Präferenzlisten $j : (i_1, i_2, i_3)$ zugeordnet, die so zu lesen sind, dass Person j Person i_1 am liebsten mag und Person i_3 am wenigsten gerne.

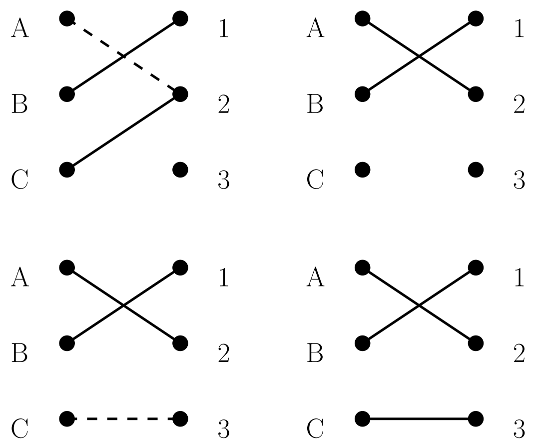
$$\begin{array}{ll} A : (1,2,3) & 1 : (B,C,A) \\ B : (2,1,3) & 2 : (A,C,B) \\ C : (2,3,1) & 3 : (A,C,B) \end{array}$$

Bestimmen Sie eine stabile Hochzeit mit dem Algorithmus Men-Propose-Women-Dispose.

Lösungsvorschlag:

Die Schritte des Algorithmus sind wie folgt:





Im letzten Schritt erhält man die stabile Hochzeit

$$\{(A,2),(B,1),(C,3)\}.$$

Aufgabe 7.

4 Punkte Geben Sie eine Auswertungsvorschrift für das Polynom

$$3+4x+5x^2+2x^3+7x^4$$

an, die nur 4 Multiplikationen und nur 4 Additionen benötigt und keine weiteren Rechenoperationen.

Tipp: Horner-Schema

Lösungsvorschlag:

$$3+x\cdot(4+x\cdot(5+x\cdot(2+x\cdot 7)))$$

Aufgabe 8.

Sei

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 26 \end{pmatrix}.$$

1 Punkt (a) Berechnen Sie $\|A\|_\infty$.

Lösungsvorschlag:

$$\|A\|_\infty = \max\{1+1+3, 1+5+1, 3+1+26\} = \max\{5,7,30\} = 30.$$

3 Punkte (b) Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung von A.

Lösungsvorschlag:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 26 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 17 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & -\frac{1}{2} & 16 \end{pmatrix}$$

Die berechnete LU-Zerlegung lautet also

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 26 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}}_{U}.$$

3 Punkte (c) Zeigen Sie: A ist positiv definit.

Lösungsvorschlag:

Wir bestimmen eine Cholesky-Faktorisierung (sofern existent):

$$\begin{aligned}
\ell_{11} &= \sqrt{a_{11}} = \sqrt{1} = 1 \\
\ell_{21} &= \frac{a_{21}}{\ell_{11}} = \frac{1}{1} = 1 \\
\ell_{31} &= \frac{a_{31}}{\ell_{11}} = \frac{3}{1} = 3 \\
\ell_{22} &= \sqrt{a_{22} - \ell_{21}^2} = \sqrt{5 - 1^2} = 2 \\
\ell_{32} &= \frac{a_{32} - \ell_{21}\ell_{31}}{\ell_{22}} = \frac{1 - 1 \cdot 3}{2} = -1 \\
\ell_{33} &= \sqrt{a_{33} - \ell_{31}^2 - \ell_{32}^2} = \sqrt{26 - 3^1 - (-1)^2} = 4.
\end{aligned}$$

Die Cholesky-Faktorisierung existiert also. Sie lautet $A = LL^\top$ mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Da die Cholesky-Faktorisierung von A existiert und auf der Hauptdiagonalen von L keine 0 steht, ist A positiv definit.

Aufgabe 9.

9 Punkte Lösen Sie folgendes Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lllll}
\min & (x-1)^2 & + & (y-2)^2 & \\
\text{unter} & (x+2)^2 & + & (y-2)^2 & \leq 1.
\end{array}$$

Lösungsvorschlag:
Wir setzen

$$\begin{aligned} f(x,y) &:= (x-1)^2+(y-2)^2 \\ g(x,y) &:= (x+2)^2+(y-2)^2-1 \end{aligned}$$

und berechnen die Gradienten

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &:= (2(x-1),2(y-2)) \\ \nabla g(x,y) &:= (2(x+2),2(y-2)) \end{aligned}$$

und die Hessematrizen

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(x,y) &:= 2I_2 \\ \nabla^2 g(x,y) &:= 2I_2. \end{aligned}$$

Da $\nabla g(x,y) = (0,0)$ genau dann gilt, wenn $(x,y) = (-2,2)$ ist, aber wegen

$$g(-2,2) = -1 \neq 0$$

die Nebenbedingung im Punkt $(-2,2)$ nicht aktiv ist, sind alle Punkte des Zulässigkeitsbereichs reguläre Punkte.
Sei (x,y) ein lokales Minimum der Optimierungsaufgabe. Da, wie oben gesehen, (x,y) regulärer Punkt ist, müssen also die KKT-Bedingungen gelten, d.h. es gibt ein $\mu \leq 0$ mit

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \mu \nabla g(x,y) \\ \mu g(x,y) &= 0 \\ g(x,y) &\leq 0. \end{aligned}$$

Letzteres Gleichungssystem lautet ausgeschrieben

$$\begin{aligned} 2(x-1) &= 2\mu(x+2) && (1) \\ 2(y-2) &= 2\mu(y-2) && (2) \\ \mu\left((x+2)^2+(y-2)^2\right) &= \mu && (3) \\ \left((x+2)^2+(y-2)^2\right) &\leq 1. && (4) \end{aligned}$$

Falls $\mu = 0$ ist, so folgt aus (1) und (2), dass $(x,y) = (1,2)$ sein muss, was, in (4) eingesetzt, den Widerspruch $9 \leq 1$ ergibt. Dieser Fall tritt also nicht auf.
Falls $\mu \neq 0$ ist, so folgt aus (2), dass $y = 2$ oder $\mu = 1$ sein muss. Der Fall $\mu = 1$ führt aber mit (1) zu dem Widerspruch 2x-2=2x+4, d.h. $-2 = 4$. Also muss $y = 2$ gelten. Aus (3) folgt damit wegen $\mu \neq 0$

$$(x+2)^2 = 1,$$

also $x \in \{-3,-1\}$.
Für $x = -3$ ergibt sich aus (1)

$$-8 = -2\mu,$$

also $\mu = 4 \geq 0$, was im Widerspruch zu $\mu < 0$ steht.
Für $x = -1$ ergibt sich aus (1)

$$-4 = 2\mu,$$

also $\mu = -2 < 0$.
Somit ist die Stelle $(x,y) = (-1,2)$ der einzige Kandidat für eine Minimalstelle.
Da $\nabla^2 f(-1,2) = 2I_2$ positiv definit ist, liegt an der Stelle $(-1,2)$ tatsächlich ein lokales Minimum.
Da der Zulässigkeitsbereich kompakt und f stetig ist, kann man diese Schlussfolgerung ebenfalls ziehen, mehr noch, bei dem Minimum handelt es sich sogar um ein globales Minimum.

Aufgabe 10.
Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = x^3 + x - 5.$$

6 Punkte (a) Führen Sie drei Schritte des Newtonverfahrens zur Bestimmung eines lokalen Minimums der Funktion f durch, der Startpunkt sei $x_0 = 1$.

Lösungsvorschlag:

Wir bestimmen zunächst Gradient und Hessematrix. Da es sich um eine eindimensionale Funktion handelt, sind diese einfach die erste und zweite Ableitung der Funktion:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 1 \\ f''(x) &= 6x \end{aligned}$$

Die Schritte des Newtonverfahrens lauten wie folgt.

Schritt 1:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - f''(x_0)^{-1} f'(x_0) \\ &= 1 - \frac{1}{6} \cdot 4 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Schritt 2:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - f''(x_1)^{-1} f'(x_1) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Schritt 3:

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 - f''(x_2)^{-1} f'(x_2) \\ &= -\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{4}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

1 Punkt (b) Konvergiert das Newtonverfahren aus (a)?

Lösungsvorschlag:

Da $x_1 = x_3$ ist, alterniert das Verfahren immer zwischen den Werten x_1 und x_2. Da $x_1 \neq x_2$ ist, konvergiert das Verfahren somit nicht.

1 Punkt (c) Besitzt die Funktion f ein lokales Minimum? Wenn ja, wie lautet ein solches?

Lösungsvorschlag:

Da $f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1 > 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$, hat die Funktion f keine lokalen Extrema, insbesondere kein lokales Minimum.

Aufgabe 11.

4 Punkte Zeigen Sie: Die Menge

$$K := \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq |x|\}$$

ist konvex.

Lösungsvorschlag:

Seien $(x,y)^\top, (x',y')^\top \in K$, d.h.

$$\begin{aligned} y &\geq |x|, \qquad (5) \\ y' &\geq |x'|, \qquad (6) \end{aligned}$$

und sei $t \in [0,1]$.

Dann folgt mit der Dreiecksungleichung (D)

$$ty + (1-t)y' \overset{(5),(6)}{\geq} t|x| + (1-t)|x'| = |tx| + |(1-t)x'| \overset{(D)}{\geq} |tx + (1-t)x'|,$$

also ist

$$t(x.y)^\top + (1-t)(x',y')^\top = (tx + (1-t)x', ty + (1-t)y')^\top \in K.$$

Damit ist K konvex.

Aufgabe 12.

7 Punkte (a) Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & x_1 & + & 10x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & & & x_2 & \leq & 3 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

mit einer Methode Ihrer Wahl.

Lösungsvorschlag:

1. Lösungsmöglichkeit: Simplexalgorithmus

Das Starttableau lautet

$$\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
\boxed{2} & 1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3
\end{array}$$

Wir pivotieren nach Bland's Rule in Spalte 1, der Minimalquotiententest liefert dann die zweite Nebenbedingungszeile als Pivotzeile. Der Schritt lautet

$$\begin{array}{rrrrr|r}
0 & \frac{19}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -3 \\
\hline
0 & \boxed{\frac{1}{2}} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\
1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3
\end{array}$$

Wir müssen in Spalte 2 und der ersten Nebenbedingungszeile pivotieren. Der Pivotschritt ergibt:

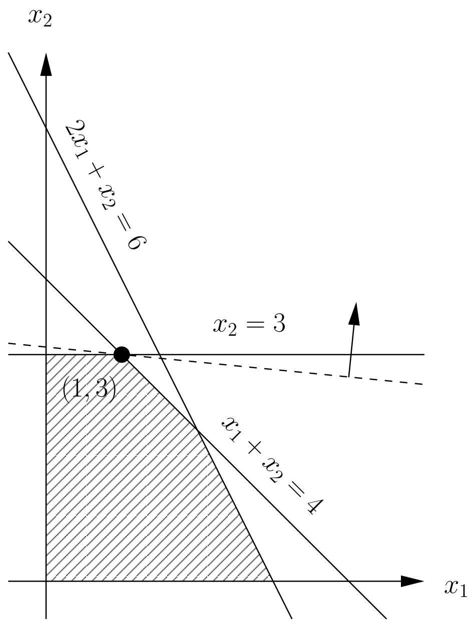
$$\begin{array}{rrrrr|r}
0 & 0 & -19 & 9 & 0 & -22 \\
\hline
0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\
1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & -2 & \boxed{1} & 1 & 1
\end{array}$$

Wir müssen in Spalte 4 und der letzten Nebenbedingungszeile pivotieren und erhalten als Tableau:

$$\begin{array}{rrrrr|r}
0 & 0 & -1 & 0 & -9 & -31 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\
1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

Das Tableau ist optimal. Wir lesen die Optimallösung $(x_1, x_2)^\top = (1, 3)^\top$ und den optimalen Zielfunktionswert 31 ab.

2. Lösungsmöglichkeit: Grafisch



Wir lesen die Optimallösung $(x_1, x_2)^\top = (1,3)^\top$ und den optimalen Zielfunktionswert 31 ab.

5 Punkte (b) Ein Medikament soll aus drei Komponenten K1, K2 und K3 möglichst kostengünstig zusammengemischt werden. Dabei enthalten die Komponenten die beiden benötigten Wirkstoffe W1 und W2 in unterschiedlicher Konzentration. Die Menge an Wirkstoff Wi in Milligramm pro Gramm der Komponente Kj, ebenso wie der Einkaufspreis von Komponente Kj in Euro pro Gramm sind aus der Tabelle unten ablesbar. Als Mindestvorgabe haben wir, dass von Wirkstoff W1 mindestens 1 Milligramm im Medikament enthalten sein muss und von Wirkstoff W2 mindestens 10 Milligramm.

Gehalt	K1	K2	K3
W1 [mg/g]	1	2	0
W2 [mg/g]	1	1	1
Einkaufspreis [€/g]	4	6	3

Modellieren Sie das Problem als lineares Programm.

Lösungsvorschlag:

Als Variablen definieren wir

$y_j :=$ Menge an Komponente Kj im Medikament in Gramm

Dann lautet das Problem

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \min & 4y_1 & + & 6y_2 & + & 3y_3 & & \\ \text{unter} & y_1 & + & 2y_2 & & & \geq & 1 \\ & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & \geq & 10 \\ & & & & & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Hierbei drücken die beiden Nebenbedingungen die Mindestvorgaben der Wirkstoffe aus, die Nichtnegativität folgt aus der Nichtexistenz negativer Masse, die Zielfunktion optimiert die Kosten.

3 Punkte (c) Bestimmen Sie eine Optimallösung des linearen Programms aus (b) mit Hilfe der Lösung von (a).

Tipp zu (c): Satz vom komplementären Schlupf

Lösungsvorschlag:

Das Programm zu (b) ist das Duale vom Programm zu (a).

In der Optimallösung in (a) sind die Variablen beide $\neq 0$, also muss für eine Optimallösung von (b) in beiden Ungleichungen Gleichheit herrschen.

In der Optimallösung in (a) ist die zweite Ungleichung nicht mit Gleichheit erfüllt, also muss für eine Optimallösung von (b) $y_2 = 0$ gelten.

Somit ist eine Optimallösung $(y_1, y_2, y_3) = (y_1, 0, y_3)$ Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcl} y_1 & & & = & 1 \\ y_1 & + & y_3 & = & 10. \end{array}$$

Also lautet die Optimallösung von (b) $(y_1, y_2, y_3) = (1, 0, 9)$.