Aufgabe 1.

5 Punkte Zeigen Sie, dass für alle $k, n \in \mathbb{N}$ gilt: 2 teilt $(5^n + n^2 + n + 3)$.

Lösungsvorschlag:

1. Lösungsmöglichkeit: Paritäten betrachten

Die Zahl $(n^2 + n) = n(n+1)$ ist das Produkt einer geraden und einer ungeraden Zahl, somit ist sie gerade.

Die Zahl 5^n ist ungerade für alle $n \in \mathbb{N}$, ebenso wie die Zahl 3. Somit ist $5^n + 3$ gerade.

Die Zahl $(5^n + 3) + (n + n^2)$ ist als Summe zweier gerader Zahlen wieder gerade, was zu zeigen war.

2. Lösungsmöglichkeit: Vollständige Induktion

Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach n.

Für $n = 0$ gilt

$$5^n + n^2 + n + 3 = 5^0 + 0^2 + 0 + 3 = 1 + 0 + 0 + 3 = 4$$

ist durch 2 teilbar. Damit ist die Verankerung geleistet.

Sei nun $n > 0$ und die Behauptung für $n - 1$ bereits gezeigt, d.h.

$$2 \text{ teilt } (5^{n-1} + (n-1)^2 + (n-1) + 3). \tag{(IV)}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
5^n + n^2 + n + 3 &= 5 \cdot 5^{n-1} + ((n-1)+1)^2 + ((n-1)+1) + 3 \\
&= 5^{n-1} + 4 \cdot 5^{n-1} + (n-1)^2 + 2(n-1) + 1 + (n-1) + 1 + 3 \\
&= \underbrace{5^{n-1} + (n-1)^2 + (n-1) + 3}_{\text{nach } (IV):\ 2|} + \underbrace{4 \cdot 5^{n-1}}_{2|} + \underbrace{2(n-1)}_{2|} + \underbrace{2}_{2|}.
\end{aligned}$$

Diese Zahl ist gerade, da der Ausdruck aus den ersten vier Summanden nach Induktionsvoraussetzung gerade ist und die letzten drei Summanden offensichtlich gerade sind. Damit gilt die Behauptung für n.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Gültigkeit der Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2.

Sei $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Die Funktion $f : A \longrightarrow A$ sei definiert durch

$$f(x) := 6 - x$$

für alle $x \in A$.

4 Punkte (a) Zeigen Sie, dass f injektiv und surjektiv ist, es sich bei f also um eine Permutation handelt.

Lösungsvorschlag:

Da $f(1)=5$, $f(5)=1$ und die Funktion f monoton fallend ist, ist die Funktion f wohldefiniert, d.h. sie bildet tatsächlich nach A ab. Weiter gilt

$$f \circ f = \mathrm{id}_A,$$

denn

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(6-x) = 6-(6-x) = x = \mathrm{id}_A(x).$$

Da die Identität id_A surjektiv ist, ist f nach Aufgabe 1.3.4 a) surjektiv. Da die Identität id_A injektiv ist, ist f nach Aufgabe 1.3.4 b) injektiv. Damit ist f bijektiv, also eine Permutation.

2 Punkte (b) Wie lautet die Zerlegung der Permutation f in Zyklen?

Lösungsvorschlag:

Als Permutation geschrieben, lautet

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Zyklenzerlegung lautet

$$f = \langle 1,5\rangle\langle 2,4\rangle\langle 3\rangle.$$

Aufgabe 3.

8 Punkte Zeigen oder widerlegen Sie: $(7,5,4,4,4,3,1,1,1)$ ist Valenzsequenz eines Graphen.
Geben Sie auch, falls möglich, einen Graphen mit dieser Valenzsequenz an.

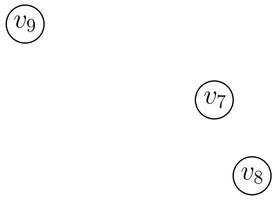
Lösungsvorschlag:

Wir benutzen das Verfahren von Havel und Hakimi:

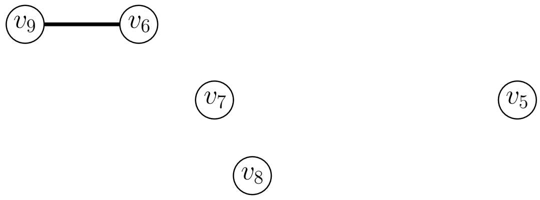
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
7	5	4	4	4	3	1	1	1
	4	3	3	3	2	0	0	1
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_9	v_7	v_8
	4	3	3	3	2	1	0	0
		2	2	2	1	1	0	0
			1	1	1	1	0	0
				0	1	1	0	0
v_1	v_2	v_3	v_4	v_6	v_9	v_5	v_7	v_8
				1	1	0	0	0
					0	0	0	0

Da es einen Graphen gibt, der nur aus 4 isolierten Knoten besteht, gibt es nach dem Verfahren von Havel und Hakimi auch einen Graphen mit Valenzsequenz $(7,5,4,4,4,3,1,1,1)$.
Einen solchen Graphen konstruieren wir, indem wir die Schritte des Algorithmus rückwärts durchgehen, wie folgt:

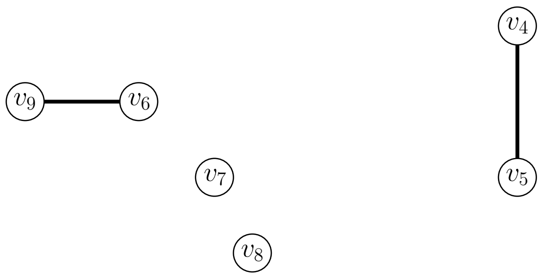
Schritt 1:



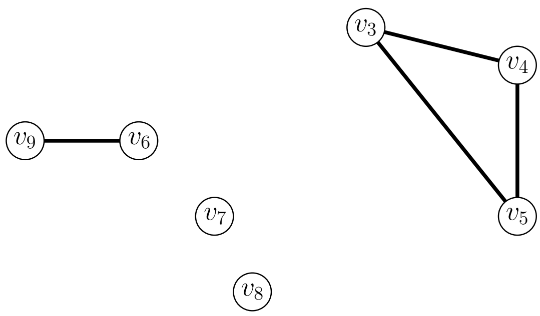
Schritt 2:



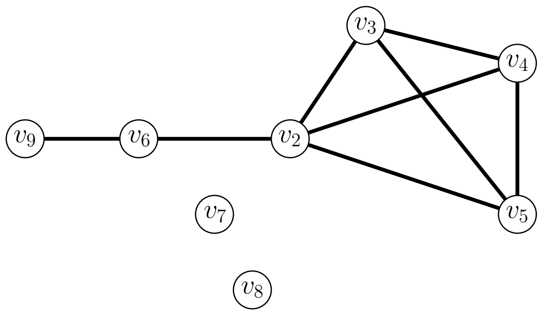
Schritt 3:



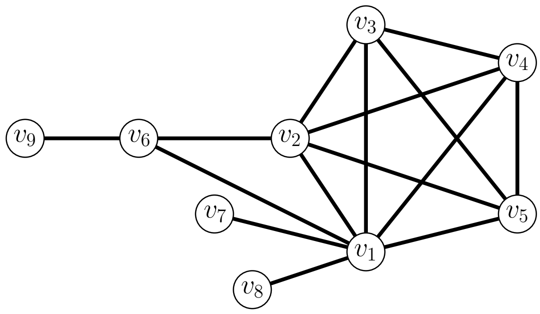
Schritt 4:



Schritt 5:

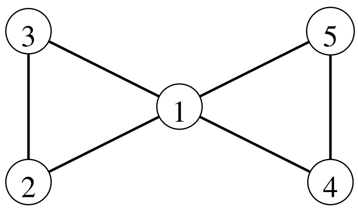


Schritt 6:



Der Graph aus dem letzten Schritt ist ein Graph mit der gesuchten Eigenschaft.

Aufgabe 4.
Betrachten Sie den unten abgebildeten Graphen $G = (V, E)$.



G

3 Punkte (a) Bestimmen Sie die Anzahl der Spaziergänge der Länge 3 von Knoten 1 nach Knoten 2.

Lösungsvorschlag:

1. Lösungsmöglichkeit: Kombinatorisch

Jeder Weg der Länge 3 von 1 nach 2 muss mindestens einmal die Kante $(1,2)$ enthalten. Die beiden anderen Kanten können nur durch Hin- und Herlaufen von Knoten 1 oder 2 zu einem ihrer Nachbarknoten entstehen. Da Knoten 2 Grad 2 und Knoten 1 Grad 4 hat, gibt es dafür 6 Möglichkeiten, von denen aber der Spaziergang 1212 doppelt auftaucht. Somit gibt es 5 Spaziergänge der Länge3 von 1 nach 2, nämlich

$$1212,\ 1232,\ 1312,\ 1412,\ 1512.$$

2. Lösungsmöglichkeit: Potenzen der Adjazenzmatrix

Die Adjazenzmatrix von G lautet

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man berechnet

$$A_G^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$A_G^3 = A_G^2 A_G = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da der Eintrag an der Stelle $(1,2)$ in der Matrix A_G^3 den Wert 5 hat, gibt es genau 5 Spaziergänge der Länge 3 von Knoten 1 nach Knoten 2.

2 Punkte (b) Zeigen Sie, dass G eulersch ist. Geben Sie eine Eulertour an.

Lösungsvorschlag:

G ist eulersch, da G zusammenhängend ist und alle Knotengrade 2 oder 4, also gerade, sind. Eine Eulertour lautet beispielsweise:

$$1231451.$$

1 Punkt (c) Zeigen oder widerlegen Sie: G ist 2-zusammenhängend.

Lösungsvorschlag:

Die Behauptung ist falsch. G ist nicht 2-zusammenhängend, denn entfernt man den Knoten 1, so entsteht ein unzusammenhängender Graph mit den beiden Komponenten $\{2,3\}$ und $\{4,5\}$.

1 Punkt (d) Zeigen oder widerlegen Sie: G ist bipartit.

Lösungsvorschlag:

Die Behauptung ist falsch. G ist nicht bipartit, denn $\{1,2,3\}$ induziert einen ungeraden Kreis.

3 Punkte (e) Bestimmen Sie die Anzahl der G aufspannenden Bäume.

Lösungsvorschlag:

Bei jedem aufspannenden Baum muss von jedem der Dreiecke genau eine Kante fehlen. In jedem Dreieck gibt es genau 3 Möglichkeiten, diese Kante auszuwählen, insgesamt gibt es also $3 \cdot 3 = 9$ aufspannende Bäume.

2 Punkte (f) Nun sei die Kantengewichtsfunktion $w\colon\ E \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$w(\{i,j\}) := |i-j|$$

für alle Kanten $\{i,j\} \in E$.

Bestimmen Sie einen minimalen aufspannenden Baum von G bezüglich der Gewichtsfunktion w.

Lösungsvorschlag:

Wir ordnen die Kanten nach Gewichten:

$$\begin{aligned} w(\{1,2\}) &= 1 \\ w(\{2,3\}) &= 1 \\ w(\{4,5\}) &= 1 \\ w(\{1,3\}) &= 2 \\ w(\{1,4\}) &= 3 \\ w(\{1,5\}) &= 4 \end{aligned}$$

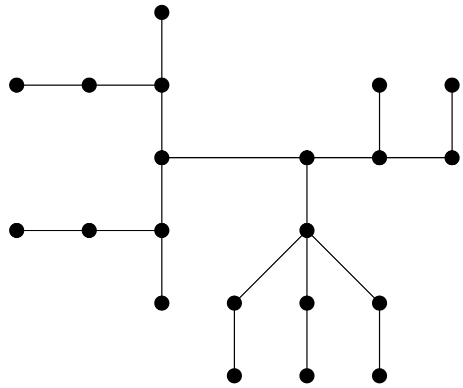
Mit dem Verfahren von Kruskal finden wir (in dieser Reihenfolge)

$$\{\{1,2\},\{2,3\},\{4,5\},\{1,4\}\}$$

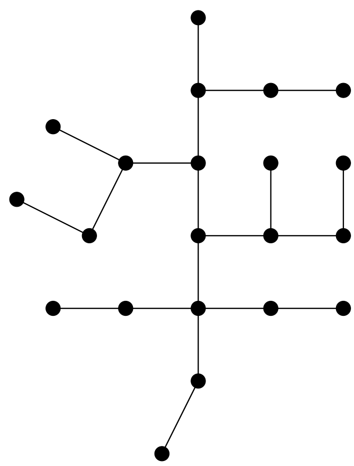
als Kantenmenge eines minimalen aufspannenden Baumes, denn $\{1,3\}$ schließt mit den bereits vorhandenen Kanten $\{1,2\}$ und $\{1,3\}$ einen Kreis. Dieser aufspannende Baum hat das Gesamtgewicht $1+1+1+3=6$.

Aufgabe 5.

6 Punkte Betrachten Sie die folgenden beiden Graphen G_1 und G_2.



G_1

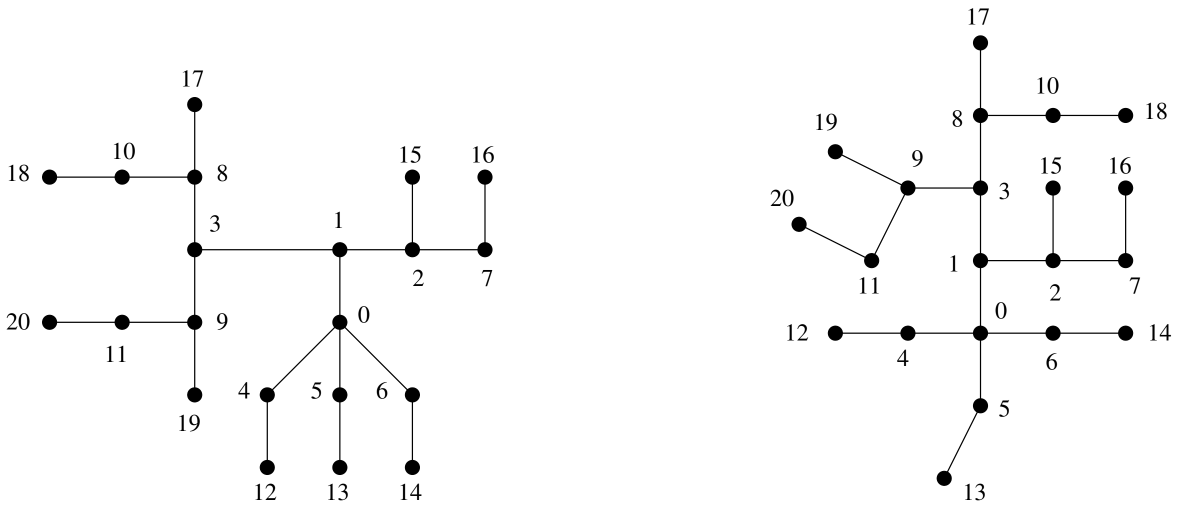


G_2

Zeigen oder widerlegen Sie: G_1 und G_2 sind isomorph.

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen durch Angabe eines Isomorphismus, dass G_1 und G_2 isomorph sind. Einen solchen Isomorphismus erhält man etwa, wenn man jeden Knoten von G_1 auf den Knoten von G_2 abbildet, der die gleiche Nummer bezüglich der untenstehenden Abbildungen hat.



G_1 G_2

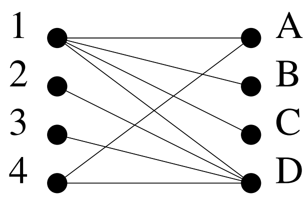
Diesen Isomorphismus findet man, wenn man zunächst die einzigen beiden Knoten, die Valenz 4 haben, aufeinander abbildet und von dort aus die Abbildungen weiter konstruiert.

Der Code von G_1 bzw. G_2 ist der des jeweils in Knoten 1 gewurzelten Wurzelbaumes. Er lautet

$$(\underbrace{(((())())((())()))}_{C(3)}\underbrace{((())(())(()))}_{C(0)}\underbrace{((())())}_{C(2)}).$$

Aufgabe 6.

Betrachten Sie folgenden bipartiten Graphen G_0.



G_0

2 Punkte (a) Bestimmen Sie ein maximales Matching von G_0.

Lösungsvorschlag:

Ein maximales Matching ist etwa $\{\{1,B\},\{3,D\},\{4,A\}\}$.

4 Punkte (b) Beweisen Sie die Maximalität des in (a) gefundenen Matchings.

Lösungsvorschlag:

Eine Knotenüberdeckung mit 3 Knoten ist die Menge $\{1,4,D\}$. Da das Matching aus (a) 3 Kanten enthält und die Knotenüberdeckung 3 Knoten, ist nach dem Satz von König die Knotenüberdeckung minimal und das Matching maximal.

Aufgabe 7.

4 Punkte Schreiben Sie die Zahl $\frac{1}{13}$ ins 3er-System um.

Lösungsvorschlag:

Es gilt

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{13} & : & \frac{1}{3} & = & \frac{3}{39} & : & \frac{13}{39} & = & 0 \text{ Rest } \frac{3}{39} \\ \frac{3}{39} & : & \frac{1}{9} & = & \frac{9}{117} & : & \frac{13}{117} & = & 0 \text{ Rest } \frac{9}{117} \\ \frac{9}{117} & : & \frac{1}{27} & = & \frac{27}{351} & : & \frac{13}{351} & = & 2 \text{ Rest } \frac{1}{351} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{27} \end{array}$$

Damit haben wir eine Periode gefunden und es gilt:

$$\left(\frac{1}{13}\right)_{(10)} = 0.\overline{002}_{(3)}.$$

Aufgabe 8.

Zeigen Sie:

1 Punkt (a) $\sqrt{10^{1000} + \frac{1}{10^{1500}}} < 10^{501}$

Lösungsvorschlag:

Wegen $\frac{1}{10^{1500}} < 1 < 99 \cdot 10^{1000}$ und der Monotonie der Quadratwurzelfunktion gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt{10^{1000} + \frac{1}{10^{1500}}} &< \sqrt{10^{1000} + 99 \cdot 10^{1000}} \\ &= \sqrt{10^{1002}} \\ &= 10^{501}. \end{aligned}$$

6 Punkte (b) $10^{-2001} < \sqrt{10^{1000} + \frac{1}{10^{1500}}} - \sqrt{10^{1000} - \frac{1}{10^{1500}}} < 10^{-1999}$

Lösungsvorschlag:

Wegen $\frac{1}{10^{1500}} < 1 < \frac{99}{100} \cdot 10^{1000}$ und der Monotonie der Quadratwurzelfunktion gilt analog zu (a):

$$\begin{aligned} \sqrt{10^{1000} - \frac{1}{10^{1500}}} &> \sqrt{10^{1000} - \frac{99}{100} \cdot 10^{1000}} \\ &= \sqrt{10^{998}} \\ &= 10^{499}. \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{10^{1000}+\frac{1}{10^{1500}}}-\sqrt{10^{1000}-\frac{1}{10^{1500}}}\\
=\ & \frac{\left(\sqrt{10^{1000}+\frac{1}{10^{1500}}}-\sqrt{10^{1000}-\frac{1}{10^{1500}}}\right)\left(\sqrt{10^{1000}+\frac{1}{10^{1500}}}+\sqrt{10^{1000}-\frac{1}{10^{1500}}}\right)}{\sqrt{10^{1000}+\frac{1}{10^{1500}}}+\sqrt{10^{1000}-\frac{1}{10^{1500}}}}\\
=\ & \frac{\left(10^{1000}+\frac{1}{10^{1500}}\right)-\left(10^{1000}-\frac{1}{10^{1500}}\right)}{\sqrt{10^{1000}+\frac{1}{10^{1500}}}+\sqrt{10^{1000}-\frac{1}{10^{1500}}}}\\
=\ & \frac{\frac{2}{10^{1500}}}{\sqrt{10^{1000}+\frac{1}{10^{1500}}}+\sqrt{10^{1000}-\frac{1}{10^{1500}}}}\\
=:\ & x
\end{aligned}$$

Nach unseren Vorüberlegungen können wir abschätzen:

$$x > \frac{2\cdot 10^{-1500}}{2\cdot 10^{501}} = 10^{-2001}$$

bzw.

$$x < \frac{2\cdot 10^{-1500}}{2\cdot 10^{499}} = 10^{-1999}$$

Aufgabe 9.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 3 & 10 & -1 & 27 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 8 & 27 & -5 & 78 \end{pmatrix}.$$

4 Punkte (a) Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung von A.

Lösungsvorschlag:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 3 & 10 & -1 & 27 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 8 & 27 & -5 & 78 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 8 & 3 & -5 & 14 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 8 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 8 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Die LU-Zerlegung lautet:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 3 & 10 & -1 & 27 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 8 & 27 & -5 & 78 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}$$

1 Punkt (b) Zeigen oder widerlegen Sie: Bei der LU-Zerlegung aus (a) handelt es sich um die Cholesky-Faktorisierung von A.

Lösungsvorschlag:

Bei der LU-Zerlegung aus (a) handelt es sich um die Cholesky-Faktorisierung von A, da $L = L^\top$.

1 Punkt (c) Zeigen oder widerlegen Sie: 0 ist Eigenwert von A.

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen: 0 ist kein Eigenwert von A.

Beweis: L und U sind als Dreieckmatrizen mit von Null verschiedenen Diagonaleinträgen regulär. Daher ist A als ihr Produkt auch regulär. Somit ist 0 kein Eigenwert von A.

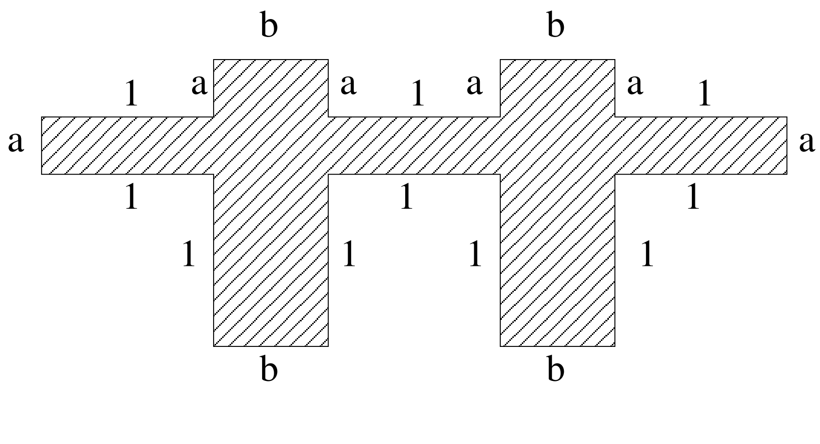
1 Punkt (d) Bestimmen Sie $\|A\|_1$.

Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned} & \|A\|_1 \\ = \; & \max\{1+3+0+8, 3+10+|-1|+27, 0+|-1|+2+|-5|, 8+27+|-5|+78\} \\ = \; & \max\{12, 41, 8, 118\} \\ = \; & 118 \end{aligned}$$

Aufgabe 10.

Das unten abgebildete Faltmuster ergibt eine oben offene Kiste mit doppeltem Boden und vier Seitenwänden, von denen 3 doppelt verstärkt sind, wobei die Kiste die Höhe a, die Breite b und die Länge 1 hat. Der angegebenen Skizze entnimmt man, dass die nicht doppelt verstärkte Seitenwand eine Längsseite ist.



Die Kiste soll ein Volumen von $a \cdot b \cdot 1 = 1$ umschließen und aus einem Faltmuster mit minimaler Fläche gebildet werden. (Wir nehmen an, dass wir den Verschnitt vollständig zu anderen Zwecken verwenden können.)

5 Punkte (a) Modellieren Sie das Problem als nichtlineares Optimierungproblem.

Lösungsvorschlag:

Als Variablen haben wir die Höhe a und die Breite b der Kiste. Dann ergibt sich der Flächenverbrauch $F(a,b)$, den wir minimieren wollen, als

$$F(a,b) = 2 \cdot 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot 1 + a \cdot 1 + 2 \cdot b \cdot 1 = 4ab + 3a + 2b.$$

Als Nebenbedingungen haben wir für das Volumen

$$V(a,b) = a \cdot b \cdot 1 = ab,$$

dass

$$V(a,b) = 1$$

gelten soll. Außerdem, haben wir, da es keine negativen Längen gibt, die Forderungen

$$a,b \geq 0.$$

Somit lautet das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lrcl} \min & 4ab+3a+2b & & \\ & ab & = & 1 \\ & a & \geq & 0 \\ & b & \geq & 0. \end{array}$$

8 Punkte (b) Lösen Sie dieses.

Lösungsvorschlag:

1. Lösungsmöglichkeit: Substitution

Da auf Grund der Volumennebenbedingung in jeder zulässigen Lösung $a,b > 0$ gelten muss, können wir substituieren

$$b = \frac{1}{a}.$$

Somit lautet unser Problem, die Funktion f mit

$$f(a) = F(a, \frac{1}{a}) = 4 + 3a + \frac{2}{a}$$

unter der Nebenbedingung $a > 0$ zu minimieren.

Wir berechnen

$$\begin{aligned} f'(a) &= 3 - \frac{2}{a^2}, \\ f''(a) &= \frac{4}{a^3}. \end{aligned}$$

Es gilt:

$$f(a) = 0 \iff a^2 = \frac{2}{3} \iff a = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Unter Beachtung der Nebenbedingung $a > 0$ ist also $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$ der einzige Kandidat für ein lokales Minimum. Wegen $f''(\sqrt{\frac{2}{3}}) = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}} > 0$ liegt an der Stelle tatsächlich ein lokales Minimum.

Desweiteren beachten wir, dass

$$\lim_{a\to 0} f(a) = +\infty = \lim_{a\to\infty},$$

d.h. unser gefundenes lokales Minimum ist sogar ein globales Minimum.

Wir errechnen b als $b = \frac{1}{a} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

Somit ist $(a,b) = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ die eindeutige Optimallösung. Der optimale Zielfunktionswert errechnet sich als $4 + 2\sqrt{6}$.

2. Lösungsmöglichkeit: Kuhn-Tucker-Bedingungen

$f(a,b) := 4ab + 3a + 2b$

$h(a,b) := ab - 1$

$g_1(a,b) := -a$

$g_2(a,b) := -b$

Unser Problem lautet dann: Minimiere $f(a,b)$ unter $h(a,b) = 0$ und $g_1(a,b) \leq 0$ und $g_2(a,b) \leq 0$.

Wir berechnen zunächst:

$$\begin{aligned}
\nabla f(a,b) &= (4b+3, 4a+2) \\
\nabla h(a,b) &= (b,a) \\
\nabla^2 f(a,b) &= \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \\
\nabla^2 h(a,b) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wegen der Gleichungsnebenbedingung ist keines der g_i aktiv. Daher können wir die beiden letzten Nebenbedingungen ignorieren. $\nabla h(a,b)$ ist ungleich $(0,0)$ für alle zulässigen Punkte. Somit sind alle zulässigen Punkte reguläre Punkte der Nebenbedingungen.

Damit ist eine notwendige Bedingung dafür, dass bei (a,b) ein Minimum vorliegt, gegeben durch die Kuhn-Tucker-Bedingungen, die besagen, dass es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\begin{aligned}
4b+3 &= \lambda b \\
4a+2 &= \lambda a
\end{aligned}$$

Wir können im Falle einer zulässigen Lösung (bei der, man beachte dies, beide Komponenten echt positiv sein müssen) wegen der Nebenbedingung schreiben $b = \frac{1}{a}$. Also haben wir:

$$\begin{aligned} \frac{4}{a} + 3 &= \frac{\lambda}{a} && (1) \\ 4a + 2 &= \lambda a. && (2) \end{aligned}$$

Aus (1) folgt

$$\lambda = 4 + 3a,$$

eingesetzt in (2) ergibt sich

$$4a + 2 = a(4 + 3a),$$

also

$$2 = 3a^2,$$

also

$$a = \pm\sqrt{\frac{2}{3}},$$

also, wegen $a \geq 0$, sogar

$$a = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Damit ist

$$b = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Der Tangentialraum der aktiven Nebenbedingungen ist

$$\{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid (a,b)(x,y)^\top\} = \{(0,0)^\top\}.$$

Auf diesem ist die Matrix

$$L = \nabla^2 f(a,b) - \lambda h(a,b)$$

trivialerweise positiv definit. Somit liegt bei

$$(a,b) = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$$

das einzige lokale Minimum der Funktion.

Dieses ist ein globales Minimum, da die Funktion, wenn man a oder b gegen 0 oder gegen ∞ gehen lässt, gegen $+\infty$ konvergiert.

Aufgabe 11.
Sei $F:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := x^2 e^y$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

4 Punkte (a) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Funktion F ist konvex.

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen: F ist nicht konvex.

1. Beweismöglichkeit:

Es gilt, dass F beliebig oft differenzierbar ist. Gradient und Hessematrix lauten:

$$\begin{aligned} \nabla F(x,y) &= (2x, x^2)e^y \\ \nabla^2 F(x,y) &= \begin{pmatrix} 2 & 2x \\ 2x & x^2 \end{pmatrix} e^y \end{aligned}$$

An der Stelle $(x,y) = (\frac{1}{2}, 0)$ lautet die Hessematrix

$$\nabla^2 F(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$(-1,2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1,2)\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -1 < 0$$

ist $\nabla^2 F(\frac{1}{2}, 0)$ nicht positiv semidefinit. Daher ist F nicht konvex.

2. Beweismöglichkeit:

Seien

$$\begin{aligned} (x_1,y_1) &= (1,0), \\ (x_2,y_2) &= (0,6). \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{2}(x_1,y_1) + \frac{1}{2}(x_2,y_2)\right) &= F\left(\frac{1}{2}(1,0) + \frac{1}{2}(0,6)\right) \\ &= F\left(\frac{1}{2}, 3\right) \\ &= \frac{1}{4}e^3 \\ &\overset{e>2}{>} e \\ &= \frac{1}{2}\cdot e + \frac{1}{2}\cdot 0 \\ &= \frac{1}{2}F(1,0) + \frac{1}{2}F(0,6) \\ &= \frac{1}{2}F(x_1,y_1) + \frac{1}{2}F(x_2,y_2), \end{aligned}$$

somit ist F nicht konvex.

3 Punkte (b) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Menge $F(\mathbb{R}^2)$ ist konvex.

Lösungsvorschlag:

wir zeigen: $F(\mathbb{R}^2)$ ist konvex.

Beweis: Wir behaupten $F(\mathbb{R}^2) = [0,\infty[$.

Wegen $x^2 \geq 0$ und $e^y > 0$ gilt $x^2 e^y \geq 0$, also folgt die Inklusion „$\subseteq$“.

Sei $a \geq 0$. Definiere $x := \sqrt{a}$ und $y = 0$. Dann gilt $F(x) = x^2 e^y = \sqrt{a}^2 e^0 = a$, also folgt die Inklusion „$\supseteq$“.

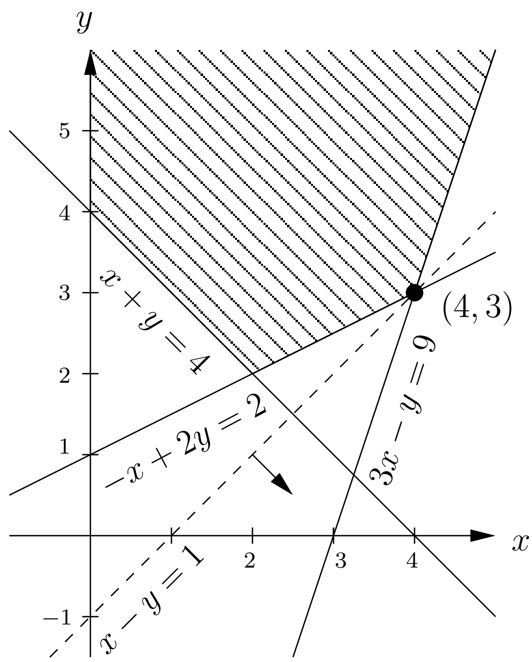
Als halboffenes Intervall ist $[0,\infty[$ konvex.

9 Punkte **Aufgabe 12.**

Lösen Sie das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x & - & y & & \\ \text{unter} & x & + & y & \geq & 4 \\ & -x & + & 2y & \geq & 2 \\ & 3x & - & y & \leq & 9 \\ & & & x,y & \geq & 0 \end{array}$$

1. Lösungsmöglichkeit: Grafisch



Wir lesen die Optimallösung $(x,y) = (4,3)$ ab und errechnen den optimalen Zielfunktionswert als

$$x - y = 4 - 3 = 1.$$

2. Lösungsmöglichkeit: Simplexverfahren

Das Starttableau für Phase I lautet:

$$\begin{array}{rrrrr|rr|r}
0 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ \hline
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
-1 & \boxed{2} & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 9
\end{array}$$

Nach dem ersten Pivotschritt lautet das Tableau:

$$\begin{array}{rrrrr|rr|r}
\frac{3}{2} & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 3 \\ \hline
\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline
\boxed{\frac{3}{2}} & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 3 \\
-\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\
\frac{5}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 10
\end{array}$$

Nach dem zweiten Pivotschritt lautet das Tableau:

$$\begin{array}{rrrrr|rr|r}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ \hline
0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline
1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\
0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 2 \\
0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} & 5
\end{array}$$

Das Tableau ist optimal bezüglich der Hilfszielfunktion. Somit ist Phase I beendet. Da der optimale Zielfunktionswert gleich 0 ist, haben wir die zulässige Lösung $(x,y)=(2,2)$ gefunden und können mit Phase II weitermachen. Das Starttableau für Phase II lautet:

$$\begin{array}{rrrrr|r}
0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \hline
1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 2 \\
0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 2 \\
0 & 0 & \boxed{\frac{5}{3}} & -\frac{4}{3} & 1 & 5
\end{array}$$

Der Pivotschritt ergibt:

$$\begin{array}{rrrrr|r}
0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 4 \\
0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 3 \\
0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 3
\end{array}$$

Das Tableau ist final. Wir lesen als Optimallösung $(x,y)=(4,3)$ und als optimalen Zielfunktionswert 1 ab.