Aufgabe 1.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Lösungsvorschlag:

Für $n = 0$ gilt

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = 0^2 = 0 = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Sei nun $n > 0$ und gelte

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k^3.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} k + n\right)^2 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n-1} k\right)^2 + 2n\sum_{k=1}^{n-1} k + n^2 \\
&\overset{IV}{=} \sum_{k=1}^{n-1} k^3 + 2n\sum_{k=1}^{n-1} k + n^2 \\
&\overset{HW}{=} \sum_{k=1}^{n-1} k^3 + 2n\frac{n(n-1)}{2} + n^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k^3 + n^3 - n^2 + n^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k^3 + n^3 \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^3,
\end{aligned}$$

d.h. die Behauptung gilt auch für n. Dabei wurde bei IV die Induktionsvoraussetzung angewandt, im nächsten Schritt HW der Hinweis aus der Aufgabenstellung.
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2.

Sie würfeln mit zwei einander nicht beeinflussenden fairen Würfeln. Auf dem ersten Würfel stehen die Augenzahlen

$$1, 2, 3, 5, 6, 7,$$

auf dem zweiten Würfel die Augenzahlen

$$2,3,4,5,7,9.$$

Fair bedeutet hier, dass jede dieser Augenzahlen mit Wahrscheinlichkeit $1/6$ gewürfelt wird.

(a) Was ist der Erwartungswert der Augenzahl vom ersten bzw. zweiten Würfel?

Lösungsvorschlag:

Sei X_i eine Zufallsvariable, die die Augenzahl des i-ten Würfels ($i \in \{1,2\}$) beschreibt.

Gesucht sind die Erwartungswerte

$$\begin{aligned} E(X_1) &= \frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 2+\frac{1}{6}\cdot 3+\frac{1}{6}\cdot 5+\frac{1}{6}\cdot 6+\frac{1}{6}\cdot 7 = 4 \quad \text{und} \\ E(X_2) &= \frac{1}{6}\cdot 2+\frac{1}{6}\cdot 3+\frac{1}{6}\cdot 4+\frac{1}{6}\cdot 5+\frac{1}{6}\cdot 7+\frac{1}{6}\cdot 9 = 5. \end{aligned}$$

(b) Was ist der Erwartungswert für die Augensumme, wenn man mit beiden Würfeln gleichzeitig würfelt?

Lösungsvorschlag:

Sei $X = X_1 + X_2$. Gesucht ist $E(X)$. Da Erwartungswerte linear sind, gilt

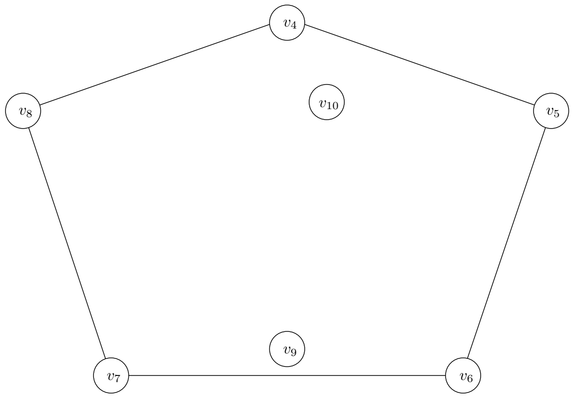
$$E(X) = E(X_1+X_2) = E(X_1)+E(X_2) = 4+5 = 9.$$

Aufgabe 3.
Zeigen oder widerlegen Sie: Es gibt einen Graphen mit genau 10 Knoten, von denen einer den Grad 9, zwei den Grad 8, fünf den Grad 5 und jeweils einer den Grad 3 und den Grad 1 haben. Geben Sie, falls möglich, einen solchen Graphen explizit an.
Lösungsvorschlag:
Wir zeigen mitttels des Verfahrens von Havel und Hakimi, dass es einen Graphen mit Valenzsequenz $(9,8,8,5,5,5,5,5,3,1)$ gibt.

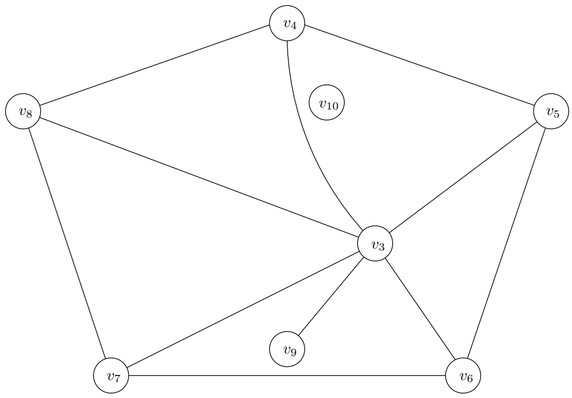
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
9	8	8	5	5	5	5	5	3	1
	7	7	4	4	4	4	4	2	0
		6	3	3	3	3	3	1	0
			2	2	2	2	2	0	0

Da es einen Graphen mit 5 Knoten vom Grad 2 gibt, nämlich den Kreis C_5, gibt es also auch einen Graphen mit der ursprünglichen Sequenz als Valenzsequenz.
Wir konstruieren einen solchen Graphen in mehreren Schritten, das Verfahren rückwärts durchlaufend, indem wir auf einem Kreis auf der Knotenmenge $\{v_4,v_5,v_6,v_7,v_8\}$ zusammen mit zwei isolierten Knoten v_9 und v_{10} beginnen.

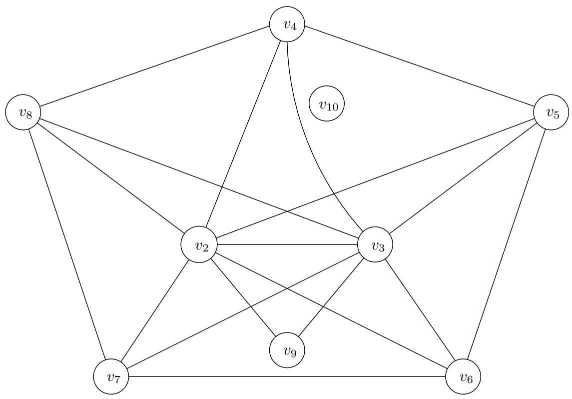
Schritt 1:



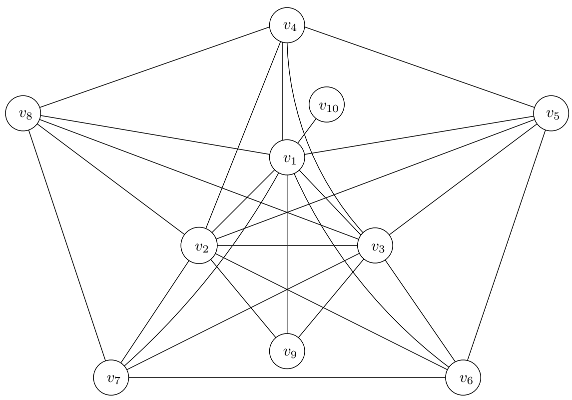
Schritt 2:



Schritt 3:



Schritt 4:



Der Graph aus Schritt 4 ist ein Graph mit der vorgegebenen Valenzsequenz. Knoten v_1 hat Grad 9, v_2 und v_3 haben Grad 8, v_4, v_5, v_6, v_7 und v_8 haben Grad 5, v_9 hat Grad 3 und v_{10} Grad 1.

Aufgabe 4.

Charakterisieren Sie die Graphen, die weder den Pfad P_3 noch den Kreis C_3 als induzierten Teilgraphen enthalten. Beweisen Sie Ihre Charakterisierung. Zeichnen Sie sämtliche solche paarweise nicht isomorphen Graphen mit 8 Knoten.

Lösungsvorschlag:

Wir behaupten: Ein Graph enthält genau dann keinen P_3 oder C_3 als induzierten Teilgraph, wenn jede seiner Komponenten ein K_1 oder ein K_2 ist.

Zunächst ist zeigen wir, dass solch ein Graph G keinen Kreis enthalten. Dass sie keinen C_3 enthalten ist eine der beiden Voraussetzungen. Angenommen G enthält einen C_n, $n \geq 4$. Löschen wir in diesem $n-3$ hintereinanderliegende Knoten, so erhalten wir einen P_3 als induzierten Teilgraphen des C_n, der, da die induzierte-Teilgraphen-Relation transitiv ist, auch induzierter Teilgraph von G ist. Dies widerspricht jedoch der anderen Voraussetzung.

Somit ist G kreisfrei, d.h. jede seiner Zusammenhangskomponenten ist ein Baum. Jeder Baum mit Durchmesser ≥ 2 enhält aber einen induzierten Weg der Länge 2, also einen P_3. Somit müssen alle diese Bäume Durchmesser 0 oder 1 haben. Der einzige Baum mit Durchmesser 0 ist ein isolierter Knoten K_1 und der einzige Baum mit Durchmesser 1 ist der vollständige Graph K_2, der eine Kante und zwei Knoten hat. Wir haben gezeigt:

Jede Komponente von G ist ein K_1 oder ein K_2.

Umgekehrt folgt offensichtlich: Wenn jede Komponente eines Graphen ein K_1 oder ein K_2 ist, dann enthält er keinen P_3 oder C_3 als induzierten Teilgraphen.

Bei 8 Knoten erhalten wir folgende fünf Graphen, die durch die Menge ihrer Zusammenhangskomponenten angegeben sind:

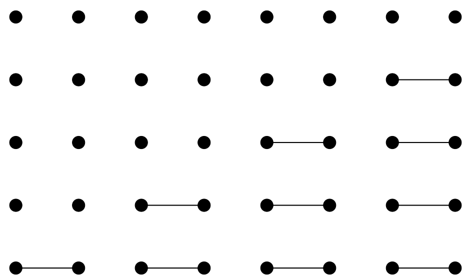
$\{K_1, K_1, K_1, K_1, K_1, K_1, K_1, K_1\}$,

$\{K_1, K_1, K_1, K_1, K_1, K_1, K_2\}$,

$\{K_1, K_1, K_1, K_1, K_2, K_2\}$,

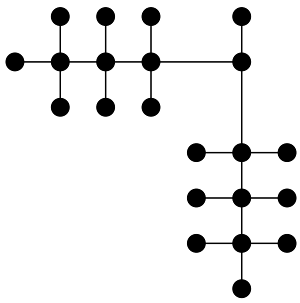
$\{K_1, K_1, K_2, K_2, K_2\}$,

$\{K_2, K_2, K_2, K_2\}$.

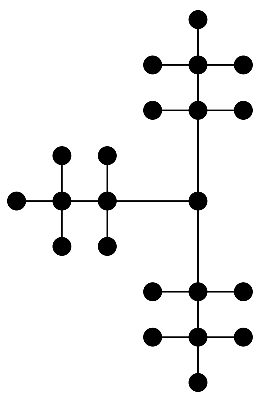


Aufgabe 5.

Zeigen oder widerlegen Sie: Die unten abgebildeten Bäume T_1 und T_2 sind isomorph.



Der Baum T_1



Der Baum T_2

Lösungsvorschlag:

In beiden Bäumen gibt es genau einen Knoten vom Grad 3. In T_1 hat dieser ein Blatt als Nachbarn, in T_2 nicht. Daher können T_1 und T_2 nicht isomorph sein.

Aufgabe 6.

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $K_{m,m} - M$ der Graph, der aus dem vollständigen bipartiten Graphen $K_{m,m}$ durch Löschen der Kanten eines perfekten Matchings M entsteht. (Zur Erinnerung: $K_{m,m}$ ist der bipartite Graph mit Bipartitionen U und W der Größe jeweils m, wo für jedes Paar $(u,w) \in U \times W$ eine Kante uw vorhanden ist.)

Für welche $m \in \mathbb{N}$ besitzt $K_{m,m} - M$ ein perfektes Matching? Beweisen Sie Ihre Aussage!

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen: $K_{m,m} - M$ besitzt genau dann ein perfektes Matching, wenn $m \neq 1$ ist.

Zunächst ist offensichtlich, dass $K_{0,0} - M$, der leere Graph, ein perfektes (leeres) Matching besitzt und dass $K_{1,1} - M$, der Graph aus zwei isolierten Knoten, kein perfektes Matching besitzt. Sei also $m \geq 2$ und seien $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ und $W = \{w_1, \ldots, w_m\}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (evtl. nach Umnummerierung der Knoten der rechten Seite) können wir annehmen, dass $M = \{u_i w_i \mid i \in \{1, \ldots, m\}\}$ ist. Wir definieren als *Partner* von i

$$p(i) := \begin{cases} i+1 & \text{falls } 1 \leq i \leq m-1, \\ 1 & \text{falls } i = m. \end{cases}$$

Wegen $m \geq 2$ gilt für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$, dass $i \neq p(i)$. Somit ist $u_i w_{p(i)}$ eine Kante von $K_{m,m} - M$. Nach Konstruktion (da die Abbildung $i \longmapsto p(i)$ eine Bijektion ist) ist

$$M' = \{u_i w_{p(i)} \mid 1 \leq i \leq m\}$$

ein Matching. Da dieses die Kardinalität m hat, ist es perfekt.

Aufgabe 7.

Schreiben Sie die Dezimalzahl 99,9 ins 5er-System um.

Lösungsvorschlag:

$$\begin{array}{rcrcrcrcll}
99\frac{9}{10} & : & 25 & & & & & = & 3 \text{ Rest } 24\frac{9}{10} & \\
24\frac{9}{10} & : & 5 & & & & & = & 4 \text{ Rest } 4\frac{9}{10} & \\
4\frac{9}{10} & : & 1 & & & & & = & 4 \text{ Rest } \frac{9}{10} & \\
\frac{9}{10} & : & \frac{1}{5} & = & \frac{9}{10} & : & \frac{2}{10} & = & 4 \text{ Rest } \frac{1}{10} & \\
\frac{1}{10} & : & \frac{1}{25} & = & \frac{5}{50} & : & \frac{2}{50} & = & 2 \text{ Rest } \frac{1}{50} & \quad \frac{1}{50} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10}
\end{array}$$

Damit haben wir eine Periode der Länge 1 gefunden, also gilt

$$99,9_{(10)} = 344,4\overline{2}_{(5)}.$$

Aufgabe 8.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -21 \\ -21 & 74 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie eine untere Dreiecksmatrix B und eine obere Dreiecksmatrix C an, so dass $A = BC$.

Lösungsvorschlag:

1. Lösungsmöglichkeit: LU-Zerlegung

$$\begin{pmatrix} 9 & -21 \\ -21 & 74 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} 9 & -21 \\ \hline -\frac{7}{3} & 25 \end{array}\right)$$

Also gilt $A = BC$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$C = \begin{pmatrix} 9 & -21 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$$

2. Lösungsmöglichkeit: Cholesky-Faktorisierung

Nach den Formeln zur Bestimmung der Cholesky-Faktorisierung berechnen wir als Einträge von B:

$$\begin{aligned} b_{11} &= \sqrt{a_{11}} = \sqrt{9} = 3, \\ b_{21} &= \frac{a_{21}}{b_{11}} = \frac{-21}{3} = -7, \\ b_{22} &= \sqrt{a_{22} - b_{21}^2} = \sqrt{74 - 7^2} = 5. \end{aligned}$$

Also gilt $A = BC$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

und

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie $\|A\|_1$.

Lösungsvorschlag:

$$\|A\|_1 = \max\{|9| + |-21|, |-21| + |74|\} = 95$$

Aufgabe 9.

Seien $f : [-8,8] \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : [-8,8] \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, definiert durch

$$\begin{aligned} f(x) &:= -2x+5 \quad \text{falls } -8 \leq x \leq 8, \\ g(x) &:= \big||x|-5\big| \quad \text{falls } -8 \leq x \leq 8. \end{aligned}$$

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: f ist konvex und strikt unimodal.

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen zunächst: f ist konvex.

Seien dazu $x, y \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in [0,1]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= -2(\lambda x + (1-\lambda)y + 5 \\ &= \lambda(-2x) + (1-\lambda)(-2y) + [\lambda + (1-\lambda)] \cdot 5 \\ &= \lambda(-2x+5) + (1-\lambda)(-2y+5) \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \end{aligned}$$

f ist also linear und damit insbesondere konvex.

Nun zeigen wir: f ist strikt unimodal.

Für $-8 < x < 8$ gilt, dass f in x differenzierbar ist mit $f'(x) = -2$. Also ist f streng monoton fallend. Damit gibt es nur ein einziges lokales Minimum, welches am Rand bei $x = 8$ liegt. f ist also strikt unimodal.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie: g ist konvex oder strikt unimodal.

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen zunächst: g ist nicht konvex.

Es gilt

$$g(\frac{1}{2} \cdot (-5) + \frac{1}{2} \cdot 5) = f(0) = 5 > 0 + 0 = \frac{1}{2} g(-5) + \frac{1}{2} g(5),$$

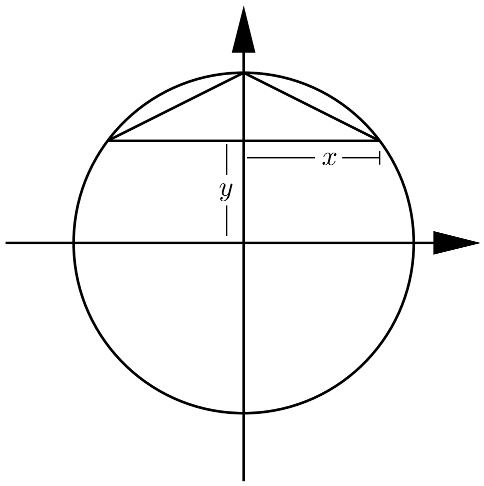
somit ist g nicht konvex.

Nun zeigen wir: g ist nicht strikt unimodal.

Offensichtlich gilt $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [-8,8]$. Ferner gilt, wie oben schon gesehen, $g(-5) = g(5) = 0$. Es gibt also mindestens zwei globale Minima. Da globale Minima immer auch lokale Minima sind, gibt es also mindestens zwei lokale Minima, d.h. g ist nicht strikt unimodal.

Aufgabe 10.

In einen Kreis vom Radius 1 soll ein gleichschenkliges Dreieck mit möglichst großem Flächeninhalt so einbeschrieben werden, dass die Ecken des Dreiecks auf dem Rand des Kreises liegen (siehe Abbildung; das dort eingezeichnete Dreieck ist offensichtlich nicht optimal).



(a) Modellieren Sie das Problem als nichtlineares Optimierungsproblem.

Lösungsvorschlag:

1. Lösungsmöglichkeit: zweidimensional

Der Flächeninhalt des Dreiecks aus der Skizze ist $x \cdot (1-y) = x - xy$. Diesen wollen wir maximieren. Dabei wollen wir gewährleisten, dass (x,y) auf dem Einheitskreis liegt, d.h. $x^2+y^2=1$ ist und $x \geq 0$ ist. Somit erhalten wir als Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lrcl} \min & -x+xy & & \\ \text{unter} & x^2+y^2 & = & 1 \\ & x & \geq & 0. \end{array}$$

2. Lösungsmöglichkeit: eindimensional

Da x von y abhängt wegen $x^2+y^2=1$ und $x \geq 0$ sein soll, gilt $x = \sqrt{1-y^2}$. Damit erhalten wir als Funktion F des Flächeninhalts des Dreiecks in Abängigkeit von y:

$$F(y) = x \cdot (1-y) = (1-y)\sqrt{1-y^2}.$$

Außerdem kann muss gelten, da wir uns im Einheitskreis befinden, dass $-1 \leq y \leq 1$. Für diese Werte ist $F(y)$ tatsächlich wohldefiniert. Unser Optimierungsproblem lautet also

$$\min_{y \in [-1,1]} F(y).$$

(b) Lösen Sie das Problem.

Lösungsvorschlag:

1. Lösungsmöglichkeit: zweidimensional, Kuhn-Tucker-Bedingungen

Seien

$$\begin{aligned} f(x,y) &= -x+xy, \\ h(x,y) &= x^2+y^2-1, \\ g(x,y) &= -x. \end{aligned}$$

Damit lautet unser Problem

$$\begin{array}{rlcl} \min & f(x,y) & & \\ \text{unter} & h(x,y) & = & 0 \\ & g(x,y) & \leq & 0. \end{array}$$

Berechnen wir zunächst die Gradienten

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (y-1,x), \\ \nabla h(x,y) &= (2x,2y), \\ \nabla g(x,y) &= (-1,0) \end{aligned}$$

und die Hessematrizen

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(x,y) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \nabla^2 h(x,y) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ \nabla^2 g(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass $\nabla h(x,y)$ und $\nabla g(x,y)$ linear unabhängig sind, außer für $(x,y) = (0,0)$. $(0,0)$ ist aber nicht zulässig auf Grund von $h(0,0) = -1 \neq 0$. Deshalb sind alle zulässigen Punkte reguläre Punkte der Nebenbedingungen.

Sei (x,y) ein lokales Minimum. Die Kuhn-Tucker-Bedingungen lauten dann: Es gibt $\mu \leq 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} y-1 &= 2\lambda x-\mu && (1) \\ x &= 2\lambda y && (2) \\ -x\mu &= 0 && (3) \end{aligned}$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

1. Fall: $\mu \neq 0$.

Wegen (3) ist dann $x = 0$. Deswegen besagen dann (1) $y - 1 = -\mu$ bzw. (2) $\lambda = 0$ oder $y = 0$. Aus der Gleichungsnebenbedingung erhalten wir $1 = x^2 + y^2 = y^2$, also $y \in \{1, -1\}$, $\lambda = 0$. Falls $y = -1$, so ist $-2 = y - 1 = -\mu \geq 0$, ein Widerspruch. Also ist $y = 1$, $x = 0$. Dann hat aber das Dreieck den Flächeninhalt 0, wir haben also ein globales Maximum statt eines Minimums von f gefunden.

2. Fall: $\mu = 0$.

Dann lautet (1) $y - 1 = 2\lambda x$. Setzen wir hierin (2) ein, so erhalten wir $y - 1 = 4\lambda^2 y$, d.h. $\lambda^2 \neq \frac{1}{4}$ und

$$y = \frac{1}{1 - 4\lambda^2}, \tag{4}$$

woraus

$$x = \frac{2\lambda}{1 - 4\lambda^2} \tag{5}$$

folgt. Setzen wir (4) und (5) in die Gleichungsnebenbedingung ein, so ergibt sich

$$\left(\frac{2\lambda}{1 - 4\lambda^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{1 - 4\lambda^2}\right)^2 - 1 = 0,$$

d.h.

$$4\lambda^2 + 1 - (1 - 4\lambda^2)^2 = 0,$$

also

$$16\lambda^2(\lambda^2 - \frac{3}{4}) = 0,$$

d.h. $\lambda \in \{0, \sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/2\}$.

Im Falle $\lambda = 0$ erhalten wir mit $(x, y) = (0, 1)$ das schon oben gefundene uns nicht interessierende Maximum.

Im Falle $\lambda = \sqrt{3}/2$ erhalten wir $x = -\sqrt{3}/2$, was als negative Zahl nicht zulässig ist.

Im Falle $\lambda = -\sqrt{3}/2$ erhalten wir mit $(x, y) = (\sqrt{3}/2, -1/2)$ einen Kandidaten für eine Minimalstelle

Für diesen Kandidaten prüfen wir die Bedingungen zweiter Ordnung nach: Der Tangentialraum M' der aktiven Nebenbedingungen ist das orthogonale Komplement des Vektors $\nabla h(\sqrt{3}/2, -1/2)$, also

$$M' = \{(t, t\sqrt{3}) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Wir müssen prüfen, ob

$$L = \nabla^2 f(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) - (-\frac{\sqrt{3}}{2})\nabla^2 h(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

positiv definit auf M' ist. Dies ist der Fall, denn

$$(t, t\sqrt{3}) \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t\sqrt{3} \end{pmatrix} = (t, t\sqrt{3}) \begin{pmatrix} 2t\sqrt{3} \\ 4t \end{pmatrix} = 6t^2\sqrt{3} > 0,$$

falls $t \neq 0$ ist.

Somit handelt es sich bei dem Kandidaten um ein lokales Mimimum. Da der Einheitskreis kompakt ist, wird ein Minimum der stetigen Funktion $f(x,y)$ auf dem Einheitskreis angenommen. Somit ist das einzige lokale Minimum $(x,y) = (\sqrt{3}/2, -1/2)$ das gesuchte globale Minimum.

2. Lösungsmöglichkeit: eindimensional, Analysis aus der Schule

Im offenen Intervall $]-1,1[$ ist F differenzierbar, und es gilt

$$F'(y) = -\sqrt{1-y^2} + \frac{(1-y)(-2y)}{2\sqrt{1-y^2}} = \frac{-2(1-y^2)+(1-y)(-2y)}{2\sqrt{1-y^2}} = \frac{2y^2-y-1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Es gilt $F'(y) = 0$ genau dann, wenn $y^2 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = 0$, d.h wenn $y = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} \in \{1, -\frac{1}{2}\}$. Im Inneren des Intervalls liegt nur der Wert $y = -\frac{1}{2}$. Für die Randpunkte $y = \pm 1$ erhalten wir jeweils ein entartetes Dreick mit Flächeninhalt 0. Da das Intervall $[-1,1]$ kompakt ist, nimmt F als stetige Funktion ein Maximum an. Dieses muss bei $y = -1/2$ liegen, da dafür ein Dreick positiven Flächeninhalts entsteht. Der zugehörige x-Wert lautet $x = \sqrt{1-y^2} = \sqrt{3}/2$.

(c) Ist die Lösung ein gleichseitiges Dreieck? Begründen Sie Ihre Antwort.

Ja, die Lösung ist ein gleichseitiges Dreieck. Zu zeigen ist, dass die Länge der Basisseite gleich der Länge eines Schenkels ist. Die Länge der Basisseite ist $2x = \sqrt{3}$. Die Länge eines Schenkels ist nach dem Satz von Pythagoras

$$\sqrt{(1-y)^2+x^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9+3}{4}} = \sqrt{3}.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

Aufgabe 11.
Gegeben sei folgendes lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrcrcr} \min & 3x & + & 2y & & \\ \text{unter} & x & - & 8y & \leq & 8 \\ & -4x & - & y & = & -3 \\ & & & x,y & \leq & 0 \end{array}$$

(a) Bringen Sie das Programm in Standardform und dualisieren Sie es.

Lösungsvorschlag:

Wir substituieren x mit $-x$ und y mit $-y$, ändern in der Zielfunktion alle Vorzeichen ein zweites Mal, um das Minimierungsproblem in ein Maximierungsproblem zu überführen, multiplizieren die zweite Nebenbedigung mit (-1) und fügen in der ersten Nebenbedingung eine positive Schlupfvariable z hinzu. Damit erhalten wir die Standardform

$$\begin{array}{lrcrcrcr} -\max & 3x & + & 2y & & & & \\ \text{unter} & -x & + & 8y & + & z & = & 8 \\ & -4x & - & y & & & = & 3 \\ & & & & & x,y,z & \geq & 0 \end{array}$$

Das Duale ergibt sich dann als

$$\begin{array}{lrcrcr} -\min & 8u & + & 3v & & \\ \text{unter} & -u & - & 4v & \geq & 3 \\ & 8u & - & v & \geq & 2 \\ & u & & & \geq & 0 \end{array}$$

(b) Besitzt das Programm eine zulässige Lösung?

Lösungsvorschlag:

Das primale Programm besitzt keine zulässige Lösung, da die zweite Restriktion in Verbindung mit den Nichtpositivitätsbedingungen einen Widerspruch darstellt:

$$0 > -3 = -4x - y \geq 0.$$

Aufgabe 12.

Zeigen oder widerlegen Sie: Es gibt einen Koeffizientenvektor $c^\top = (c_1, c_2, c_3)^\top \in \mathbb{R}^3$, so dass der Simplexalgorithmus mit Blands Rule, angewandt auf das lineare Programm

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \max & c_1x & + & c_2y & + & c_3z & & \\ \text{unter} & x & & & & & \leq & 1 \\ & & & y & & & \leq & 1 \\ & & & & & z & \leq & 1 \\ & & & & & x,y,z & \geq & 0 \end{array}$$

mindestens drei Schritte benötigt, um eine Optimallösung zu finden.

Lösungsvorschlag:

Wählen wir $c^\top = (1,1,1)$, so ist kann in jedem Simplexschritt höchstens eine der drei Nichtbasisvariablen x, y, z zu einer Basisvariablen gemacht werden, d.h. wir benötigen mindestens drei Schritte. Nach den drei Pivots auf der x-, y- bzw. z-Spalte liegt aber ein optimales Tableau vor, da die reduzierten Kosten der Schlupfvariablen dann alle gleich -1 sind, und $(x,y,z)^\top = (1,1,1)^\top$ ist eine Optimallösung.