Aufgabe 1.

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \left(3k^2 + 3k + 1\right) = (n+1)^3.$$

Lösungsvorschlag:

Wir führen vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

Für $n = 0$ gilt die Behauptung offensichtlich wegen

$$1 + \sum_{k=1}^{0} \left(3k^2 + 3k + 1\right) = 1 + 0 = 1 = (0+1)^3,$$

da die leere Summe 0 ergibt.

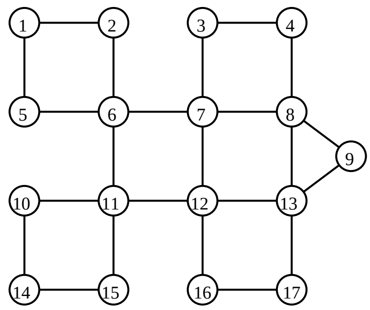
Sei nun $n \geq 1$ und die Behauptung bewiesen für $n-1$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
& 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(3k^2 + 3k + 1\right) \\
= \; & 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(3k^2 + 3k + 1\right) + \left(3n^2 + 3n + 1\right) \\
\overset{IV}{=} \; & ((n-1)+1)^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\
= \; & n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\
= \; & (n+1)^3.
\end{aligned}$$

Somit gilt die Behauptung auch für n.

Aufgabe 2.

Betrachten Sie folgenden Graphen:



Zeigen oder widerlegen Sie: Der Graph ist eulersch.

Geben Sie, sofern möglich, eine Eulertour an.

Lösungsvorschlag:

Da alle Knotengrade gerade sind und der Graph zusammenhängend ist, ist er eulersch. Wir konstruieren eine Eulertour mit dem Verfahren aus der Vorlesung. Wir starten mit Knoten 1 und suchen Kreise. Falls wir eine Wahlmöglichkeit haben, wählen wir zunächst Knoten kleineren Indexes. So finden wir zunächst den Kreis

$$1-2-6-5-1.$$

Am Knoten 6 finden wir den Kreis

$$6-7-3-4-8-7-12-11-6.$$

Am Knoten 8 finden wir den Kreis

$$8-9-13-8.$$

Am Knoten 13 finden wir den Kreis

$$13-12-16-17-13.$$

Schließlich finden wir am Knoten 11 den Kreis

$$11-10-14-15-11$$

und setzen die Kreise zu der Eulertour

$$1-2-(6-7-3-4-(8-9-(13-12-16-17-13)-8)-7-12-(11-10-14-15-11)-6)-5-1$$

zusammen.

Aufgabe 3.
Zeigen oder widerlegen Sie: $(8,6,6,6,6,3,3,2,2)$ ist Valenzsequenz eines Graphen.
Lösungsvorschlag: Variante 1:
Wir behaupten: Die Sequenz ist keine Valenzsequenz eines Graphen.
Wir benutzen das Verfahren von Havel-Hakimi:

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
8	6	6	6	6	3	3	2	2
	5	5	5	5	2	2	1	1
		4	4	4	1	1	1	1
			3	3	0	0	1	1
			v_4	v_5	v_8	v_9	v_7	v_7
			3	3	1	1	0	0
				2	0	0	0	0
					-1	-1	0	0

Da in einer Valenzsequenz keine negativen Zahlen vorkommen können, ist die letzte Sequenz keine Valenzsequenz, somit ist nach dem Verfahren von Havel-Hakimi auch die ursprüngliche Sequenz keine Valenzsequenz eines Graphen.
Lösungsvorschlag: Variante 2:
Bezeichne

$$(d_1,d_2,d_3,d_4,d_5,d_6,d_7,d_8,d_9)=(8,6,6,6,6,3,3,2,2)$$

die zu untersuchende Sequenz. Wäre sie Valenzsequenz eines Graphen, so müsste nach dem Satz von Erdös und Gallei gelten:

$$\forall i \in \{1,\ldots,9\}: \quad \sum_{j=1}^{i} d_j - i(i-1) \leq \sum_{j=i+1}^{9} \min\{i, d_j\}.$$

Dies ist aber hier für $i = 5$ nicht erfüllt, da dann

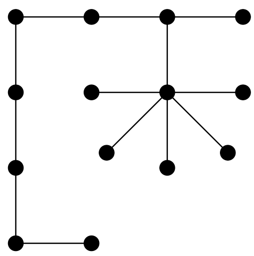
$$\sum_{j=1}^{i} d_j - i(i-1) = 8+6+6+6+6-5\cdot 4 = 12$$

und

$$\sum_{j=i+1}^{9} \min\{i, d_j\} = 3+3+2+2 = 10$$

ist, aber $12 > 10$. Somit kann die Sequenz keine Valenzsequenz eines Graphen sein.

Aufgabe 4.
Bestimmen Sie den Code des folgenden Baumes. Kommentieren Sie Ihr Vorgehen ausführlich.



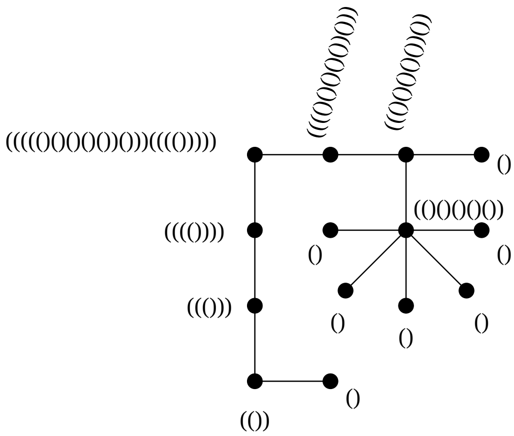
Lösungsvorschlag:
Wir stellen zunächst fest, dass der Knoten links oben das Zentrum des Baumes ist. Nennen wir diesen Knoten v. Somit müssen wir rekursiv, anfangend bei den Blättern, den Code jedes Knotens in dem in v verwurzelten Wurzelbaum bestimmen. Der Code des Baumes ist dann der Code von v.
Für den unteren Teilbaum von v bestimmt man leicht den Code $(((())))$. Nun betrachten wir den rechten Teilbaum. Der Code der 6 Blätter ist jeweils $()$. Somit ist der Code des Knotens vom Grad 6 also $(()()()()())$, und der Code seines Elternknotens (des Knotens vom Grad 3) ist $((()()()()())())$, da $(()()()()())$ lexikographisch kleiner ist als $()$. Dessen linker Nachbar (und somit der ganze rechte Teilbaum von v) hat den Code $(((()()()()())()))$. Setzen wir die Ergebnisse für den unteren und rechten Teilbaum von v zusammen, so erhalten wir, da

$$(((()()()()())())) \preceq (((())))$$

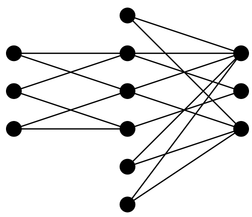
ist, als Code des gesamten Baumes

$$(\,(((()()()()())()))\,(((())))\,).$$

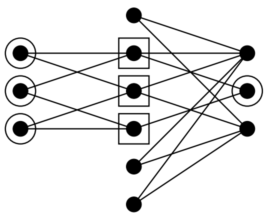
In der Zeichnung unten sind die einzelnen Zwischenschritte dargestellt.



Aufgabe 5.
Zeigen oder widerlegen Sie: Der unten abgebildete Graph ist bipartit und hat ein perfektes Matching.



Lösungsvorschlag:
Der Graph ist zwar bipartit (die drei linken und die drei rechten Knoten bilden die eine Bipartition, die mittleren sechs die andere), er hat jedoch kein perfektes Matching, wie wir im Folgenden zeigen werden.
Sei dazu A die Menge der eingekreisten Knoten in der folgenden Zeichnung. Man sieht, dass alle Knoten aus A zu der gleichen Bipartition gehören.



Dann ist die Menge $N(A)$ der Nachbarn von Knoten aus A die Menge der durch ein Kästchen eingerahmten Knoten. Da

$$|A| = 4 > 3 = |N(A)|$$

gilt, hat der Graph nach dem Heiratssatz von Hall kein perfektes Matching.

Aufgabe 6.
Schreiben Sie die Dezimalzahl 10,75 um ins

(a) Dualsystem

Lösungsvorschlag:

Aus

$$10,75 = 10 + \frac{3}{4} = 8 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

ersieht man, dass $10,75 = 1010,11_{(2)}$.

(b) Dreiersystem.

Wir benutzen Division mit Rest bezüglich 3er-Potenzen.

$$\begin{aligned} 10,75 : 9 &= 1 \text{ Rest } 1,75 \\ 1,75 : 3 &= 0 \text{ Rest } 1,75 \\ 1,75 : 1 &= 1 \text{ Rest } \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} : \frac{1}{3} &= 2 \text{ Rest } \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} : \frac{1}{9} &= 0 \text{ Rest } \frac{1}{12} \left(= \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

Somit haben wir eine Periode gefunden und es gilt

$$10,75 = 101,\overline{20}_{(3)}.$$

Aufgabe 7.

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung von A.

Lösungsvorschlag:

Wir berechnen mittels elementarer Zeilenumformungen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{r|rr} 2 & 1 & -1 \\ \hline -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & -1 \\ \hline -1 & 2 & 2 \\ \cline{2-2} 2 & \frac{1}{2} & 2 \end{array}\right)$$

Somit lautet eine LU-Zerlegung

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{U}.$$

(b) Lösen Sie unter Benutzung der LU-Zerlegung das Gleichungssystem

$$Ax = (-4,0,0)^\top.$$

Lösungsvorschlag:

Wir bestimmen zunächst die Lösung von $Ly = (-4,0,0)^\top$:

$$\begin{aligned} y_1 &= -4 \\ y_2 &= 0 + y_1 = -4 \\ y_3 &= 0 - \frac{1}{2}y_2 - 2y_1 = 10 \end{aligned}$$

Nun bestimmen wir die Lösung von $Ux = y = (-4,-4,10)^\top$:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{2}(10) = 5 \\ x_2 &= \frac{1}{2}(-4 - 2x_3) = -7 \\ x_1 &= \frac{1}{2}(-4 - x_2 + x_3) = 4 \end{aligned}$$

Somit ist $(x_1,x_2,x_3) = (4,-7,5)$ die Lösung von $Ax = (-4,0,0)^\top$.

(c) Bestimmen Sie $\|A\|_1$ und $\|A\|_\infty$.

Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{j\in\{1,2,3\}} \sum_{i=1}^{3} |a_{ij}| = |2| + |-2| + |4| = 8 \\ \|A\|_\infty &= \max_{i\in\{1,2,3\}} \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}| = |4| + |3| + |1| = 8. \end{aligned}$$

Aufgabe 8.

Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{llcll} \min & x\cdot e^x & + & 2y\cdot e^y & \\ \text{unter} & e^x & + & 2e^y & = 1 \end{array}$$

Lösungsvorschlag:

Sei

$$f(x,y) = x\cdot e^x + 2y\cdot e^y$$

und

$$h(x,y) = e^x + 2e^y - 1.$$

Dann lautet das Problem

$$\begin{array}{lll} \min & f(x,y) & \\ \text{unter} & h(x,y) & = 0. \end{array}$$

Wir berechnen nun die Gradienten und Hessematrizen:

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= ((x+1)e^x, 2(y+1)e^y) \\
\nabla h(x,y) &= (e^x, 2e^y) \\
\nabla^2 f(x,y) &= \begin{pmatrix} (x+2)e^x & 0 \\ 0 & 2(y+2)e^y \end{pmatrix} \\
\nabla^2 h(x,y) &= \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & 2e^y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Da alle Einträge des Gradienten von h positiv sind, ist $\nabla h(x,y) \neq 0$, also sind alle Punkte reguläre Punkte der Nebenbedingungen.
Notwendig dafür, dass an der Stelle (x,y) ein Minimum vorliegt, sind die Kuhn-Tucker Bedingungen. Diese lauten hier: Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned}
(x+1)e^x &= \lambda e^x \\
2(y+1)e^y &= \lambda \cdot 2e^y
\end{aligned}$$

Da $e^x, e^y > 0$ sind, ist dies äquivalent zu

$$x+1 = \lambda = y+1$$

bzw.

$$x = \lambda - 1 = y.$$

Setzen wir dies in die Nebenbedingung ein, so erhalten wir

$$1 = e^x + 2e^y = e^x + 2e^x = 3e^x,$$

also

$$x = \ln\frac{1}{3} = -\ln 3$$

und somit auch

$$y = -\ln 3, \quad \lambda = 1 - \ln 3.$$

Unser Kandidat für ein Minimum ist also $(-\ln 3, -\ln 3)$. Prüfen wir nun für diesen Kandidaten die Bedingungen zweiter Ordnung nach. Dazu ist

$$L = \nabla^2 f(x,y) - \lambda \nabla^2 h(x,y)$$

auf positive Definitheit zu untersuchen. Nach unserer Rechnung oben ist L die Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} (2-\ln 3)\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2(2-\ln 3)\frac{1}{3} \end{pmatrix} - (1-\ln 3)\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

mit nur positiven Diagonaleinträgen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$. Somit ist L positiv definit und $(-\ln 3, -\ln 3)$ ein striktes lokales Minimum.

Aufgabe 9.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $a_1, \ldots, a_n, c \in \mathbb{R}$. Sei ferner $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1, \cdots, x_n) = c + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

Zeigen oder widerlegen Sie: f ist konvex.

Lösungsvorschlag: Variante 1:

Wir zeigen, dass f konvex ist, mittels der Definition von Konvexität.

Seien dazu $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ und $0 < \lambda < 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= c + \sum_{i=1}^{n} a_i(\lambda x_i + (1-\lambda)y_i)) \\
&= \lambda c + (1-\lambda)c + \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda x_i + \sum_{i=1}^{n} a_i (1-\lambda) y_i \\
&= \lambda \left(c + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right) + (1-\lambda) \left(c + \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \right) \\
&= \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)
\end{aligned}$$

Somit ist f konvex, aber für $n > 0$ nicht strikt konvex.

Lösungsvorschlag: Variante 2:

Wir zeigen, dass f konvex ist, mittels Differentialrechnung.

f ist zweimal stetig differenzierbar mit Gradienten $\nabla f(x) = (a_1, \ldots, a_n)$ und Hessematrix $\nabla^2 f(x) = 0$. Da die Nullmatrix positiv semidefinit ist, ist f konvex.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^3$ strikt unimodal ist.

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen, dass g strikt unimodal ist.

Es gilt, dass g differenzierbar ist. Die Ableitung ist $g'(x) = 3x^2 > 0$ für $x \neq 0$. Somit ist g streng monoton wachsend. Damit ist das einzige lokale Minimum am linken Rand des Intervalls, also der Stelle a.

Aufgabe 10.

Lösen Sie mit dem Zwei-Phasen-Simplexalgorithmus folgendes lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & x & + & 2y & + & 3z & & \\
\text{unter} & x & + & y & + & z & \leq & 3 \\
 & 2x & + & 2y & + & z & \geq & 4 \\
 & & & & & x,y,z & \geq & 0
\end{array}$$

Sie müssen dabei nicht unbedingt Bland's Rule verwenden.

Lösungsvorschlag: Variante 1:

Mittels Simplexalgorithmus unter Verwendung von Bland's Rule löst man die Aufgabe wie folgt. Das Starttableau für Phase I lautet

$$\begin{array}{rrrrr|r|r}
2 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ \hline
1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
\boxed{2} & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 4
\end{array}$$

Nach Blands Rule pivotieren wir in der ersten Spalte, der Minimalquotiententest liefert uns die letzte Zeile als Pivotzeile. Wir erhalten

$$\begin{array}{rrrrr|r|r}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline
0 & 1 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ \hline
0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\
1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2
\end{array}$$

Damit ist Phase I beendet und eine zulässige Basis $(x,y) = (3,0)$ gefunden. Durch Streichen der künstlichen Zielfunktion und der Spalte der künstlichen Schlupfvariablen erhalten wir als Starttableau für Phase II:

$$\begin{array}{rrrrr|r}
0 & 1 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ \hline
0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\
1 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 2
\end{array}$$

Nach Bland's Rule pivotieren wir in der zweiten Spalte, der Minimalquotiententest liefert uns wieder die letzte Zeile als Pivotzeile. Nach dem Pivotschritt erhält man:

$$\begin{array}{rrrrr|r}
-1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -4 \\ \hline
0 & 0 & \boxed{\frac{1}{2}} & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\
1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 2
\end{array}$$

Wir müssen in Spalte 3 in der oberen Zeile pivotieren und erhalten:

$$\begin{array}{rrrrr|r}
-1 & 0 & 0 & -4 & -1 & -8 \\ \hline
0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1
\end{array}$$

Das Tableau ist optimal, da alle reduzierten Kosten nichtpositiv sind. Wir lesen die Optimallösung $(x,y,z) = (0,1,2)$ und den optimalen Zielfunktionswert 8 ab.

Lösungsvorschlag: Variante 2:

Eine kürzere Lösung ist die folgende, bei der nicht nach Bland's Rule pivotiert wird. Das Starttableau für Phase I lautet wie eben

$$\begin{array}{rrrrr|r|r}
2 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ \hline
1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
1 & 1 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 3 \\
2 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 4
\end{array}$$

Der erste Pivotschritt ergibt:

$$\begin{array}{rrrrr|r|r}
1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline
-2 & -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & -9 \\ \hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
1 & \boxed{1} & 0 & -1 & -1 & 1 & 1
\end{array}$$

Der zweite Pivotschritt ergibt:

$$\begin{array}{rrrrr|r|r}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline
-1 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & -8 \\ \hline
0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\
1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1
\end{array}$$

Damit ist Phase I beendet und nach Streichen der künstlichen Zielfunktion und der künstlichen Variablen erhält man das Tableau

$$\begin{array}{rrrrr|r}
-1 & 0 & 0 & -4 & -1 & -8 \\ \hline
0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1
\end{array}$$

Dieses ist final und wir lesen wie eben die Optimallösung $(x,y,z) = (0,1,2)$ mit optimalem Zielfunktionswert 8 an.

Aufgabe 11.

Sei $c \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{R}^m$, A eine reelle $(m \times n)$-Matrix. Gegeben sei das lineare Programm

$$\begin{array}{lrcl}
\max & c^\top x & & \\
\text{unter} & Ax & \leq & b.
\end{array} \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie das dazu duale Programm.

Lösungsvorschlag:

Zunächst bringen wir das primale Programm in die Standardform

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & c^\top x^+ & - & c^\top x^- & & & & \\
\text{unter} & Ax^+ & - & Ax^- & + & z & = & b \\
 & & & & x^+, & x^-, z & \geq & 0.
\end{array}$$

Das dazu duale Programm lautet

$$\begin{array}{lrcl}
\min & y^\top b & & \\
\text{unter} & y^\top A & \geq & c^\top \\
 & -y^\top A & \geq & -c^\top \\
 & y & \geq & 0.
\end{array}$$

Dies können wir auch schreiben als

$$\begin{array}{lrcl}
\min & y^\top b & & \\
\text{unter} & y^\top A & = & c^\top \\
 & y & \geq & 0.
\end{array}$$

(b) Sei x zulässig für (1) und y zulässig für das duale Programm. Zeigen Sie:

$$c^\top x \leq b^\top y.$$

Lösungsvorschlag:

Wenn x zulässig für das primale Programm und y zulässig für das duale ist, so muss nach (a) gelten:

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \qquad (2) \\ y^\top A &= c^\top \qquad (3) \\ y &\geq 0 \qquad (4) \end{aligned}$$

Somit schließen wir

$$c^\top x \overset{(3)}{=} y^\top A x \overset{(2),(4)}{\leq} y^\top b = b^\top y.$$

Aufgabe 12.

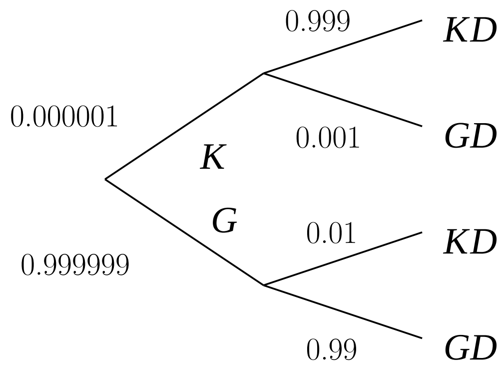
In einer Testgruppe sind Menschen, die mit Wahrscheinlichkeit 10^{-6} krank sind und ansonsten gesund. Ein Test stellt bei einem Kranken mit Wahrscheinlichkeit $999 \cdot 10^{-3}$ die Diagnose „krank“ aus, ansonsten wird er als „gesund“ diagnostiziert. Bei einem Gesunden stellt der Test mit Wahrscheinlichkeit $99 \cdot 10^{-2}$ die Diagnose „gesund“, ansonsten „krank“.

(a) Was ist die Gesamtwahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person krank ist und als gesund diagnostiziert wurde?

(b) Man betrachte die Gruppe der Personen, die als „krank“ diagnostiziert wurden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Person dieser Gruppe gesund?

Lösungsvorschlag:

Wir bezeichnen das Ereignis „krank“ mit K und „gesund“ mit G, sowie „krank diagnostiziert“ mit KD und „gesund diagnostiziert“ mit GD. Dann kann man die Lösungen zu (a) und (b) an dem folgenden Flussdiagramm ablesen:



(a) Gefragt ist nach $p(K \cap GD)$. Dies ist gleich $0.000001 \cdot 0.001 = 10^{-9}$.

(b) Gefragt ist nach der bedingten Wahrscheinlichkeit $p(G|KD) = \frac{p(G\cap KD)}{p(KD)}$. Wir lesen am zweituntersten Ast ab, dass

$$p(G \cap KD) = 0.999999 \cdot 0.01 = 0.00999999.$$

Summieren wir die Wahrscheinlichkeiten der Äste, die zu KD führen, so erhalten wir

$$p(KD) = p(K \cap KD) + p(G \cap KD) = 0.000000999 + 0.00999999 = 0.010000989.$$

Also ist

$$p(G|KD) = \frac{0.00999999}{0.010000989} = \frac{9999990}{10000989}.$$