5 Punkte **Aufgabe 1.**

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} 1 = \binom{n+1}{2}$$

Aufgabe 2.

Gegeben sei die folgende Permutation:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 4 & 2 & 3 & 7 & 6 & 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 Punkte (a) Geben Sie eine Zerlegung von σ in Zyklen an.

3 Punkte (b) Geben Sie eine Zerlegung von σ in Transpositionen an.

6 Punkte **Aufgabe 3.**

Zeigen oder widerlegen Sie: $(9,8,6,6,6,6,4,3,2,2,2)$ ist Valenzsequenz eines Graphen.

Aufgabe 4.

Sei der Graph $G = (V,E)$ gegeben durch die Knotenmenge $V = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ und die Kantenmenge

$$E = \{\{a,b\} \in \binom{V}{2} \mid a \text{ teilt } b \text{ oder } b \text{ teilt } a\}.$$

Ferner sei eine Kantengewichtsfunktion $c : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$c(\{a,b\}) := |a-b|.$$

4 Punkte (a) Zeichnen Sie den Graphen mit Kantengewichten.

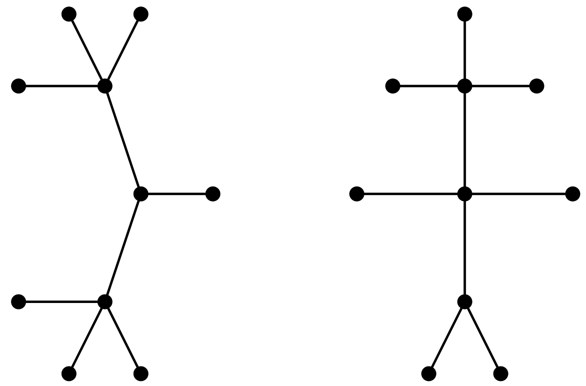
4 Punkte (b) Bestimmen Sie einen minimalen aufspannenden Baum in ihm.

4 Punkte (c) Bestimmen Sie den Code dieses Baumes.

Hinweis [Lösungskontrolle zu (b)]: Das Gesamtgewicht eines minimalen aufspannenden Baumes beträgt 22.

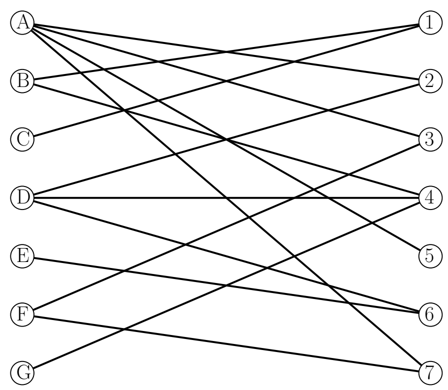
5 Punkte **Aufgabe 5.**

Beweisen oder widerlegen Sie: Die beiden folgenden Graphen sind isomorph.



8 Punkte **Aufgabe 6.**

Zeigen oder widerlegen Sie: Der folgende bipartite Graph hat ein perfektes Matching.



Falls der Graph kein perfektes Matching hat, geben Sie eine Knotenüberdeckung mit höchstens 6 Knoten an.

5 Punkte **Aufgabe 7.**

Schreiben Sie den Bruch von Dezimalzahlen $\frac{51}{7}$ um ins 2er-System (in Kommaschreibweise).

9 Punkte **Aufgabe 8.**

Bestimmen Sie eine Cholesky-Faktorisierung der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 10 & 16 \\ 2 & 16 & 41 \end{pmatrix}$$

und lösen Sie dann damit das Gleichungssystem

$$Ax = (-3, 12, 11)^\top$$

unter Verwendung von insgesamt nur noch höchstens 18 Rechenoperationen (Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen, Divisionen).

Aufgabe 9.

10 Punkte (a) Lösen Sie folgendes nichtlineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & x & + & y & & \\ & x^2 & + & y^2 & = & 1 \\ & x & - & 2y & \geq & 1. \end{array}$$

3 Punkte (b) Zeichnen Sie den zulässigen Bereich (und interpretieren Sie die Lösung (1 Sonderpunkt)).

4 Punkte **Aufgabe 10.**

Sei $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^2$.

Zeigen Sie: f ist konvex.

7 Punkte **Aufgabe 11.**

Seien $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & = & 3 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ \\ y_1 & + & 3y_2 & \geq & 2 \\ 2y_1 & + & 4y_2 & \geq & 5 \end{array}$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$2x_1 + 5x_2 \leq y_1 + 3y_2.$$

10 Punkte **Aufgabe 12.**

Lösen Sie folgendes lineare Optimierungsproblem mit dem Simplexalgorithmus:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \max & x & + & 2y & + & 4z & & \\ \text{s.d.} & x & + & 3y & + & 6z & \leq & 5 \\ & x & + & y & + & z & \leq & 3 \\ & x & + & 2y & + & 3z & \leq & 4 \\ & & & & & x, y, z & \geq & 0 \end{array}$$

Sie brauchen nicht nach Bland's Rule zu pivotieren, sondern dürfen im Falle von Wahlmöglichkeiten ein zulässiges Pivotelement so wählen, dass die Zahlen möglichst einfach bleiben.
Hinweis: Bei Verwendung von Bland's Rule braucht man 3 Pivotschritte; es tauchen Brüche mit Nenner 2 und 5 auf. Brüche mit Nenner 5 tauchen auch in einer anderen Lösungsmöglichkeit auf, bei der man allerdings 4 Schritte benötigt.