Lösungsskizzen zu den Klausuraufgaben zum Kurs 1142 Algorithmische Mathematik

1142KWL09

Aufgabe 1.

Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 2$ gilt: n paarweise verschiedene Geraden im $\mathbb{R}^2$ schneiden sich untereinander in höchstens $\binom{n}{2}$ Punkten.

Lösung:

Wir zeigen die Aussage per vollständiger Induktionüber n. Wir benutzen, dass sich zwei verschiedene Geraden im $\mathbb{R}^2$ in höchstens einem Punkt schneiden. Damit ist die Verankerung $n = 2$ erfolgt. Seien nun $n \geq 3$ paarweise verschiedene Geraden $g_1, g_2, \ldots, g_n$ im $\mathbb{R}^2$ gegeben. Nach Induktionsvoraussetzung schneiden sich $g_1, \ldots, g_{n-1}$ in höchstens $\binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Punkten. Durch die Gerade g_n kommen höchstens $n-1$ Schnittpunkte hinzu, da g_n jede der g_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ in höchstens einem Punkt schneidet. Also haben wir insgesamt höchstens $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ Schnittpunkte.

Aufgabe 2.

Gibt es Permutationen σ_1, σ_2 von 5 Symbolen, so dass σ_1 bzw. σ_2 jeweils aus einem Zyklus der Länge 4 und einem Zyklus der Länge 1 bestehen und ihr Produkt einen Zyklus der Länge 5 ergibt? Beweisen Sie Ihre Antwort.

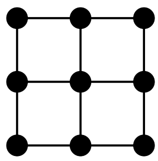
Lösung:

Es gibt solche Permutationen. Ein Beispiel sind $\sigma_1 = \langle 1\,2\,3\,4 \rangle$ und $\sigma_2 = \langle 2\,3\,4\,5 \rangle$. Es gilt:

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \langle 1\,2\,3\,4 \rangle \circ \langle 2\,3\,4\,5 \rangle = \langle 1\,2\,4\,5\,3 \rangle.$$

Aufgabe 3.

Betrachten Sie folgenden Graphen:



(a) Geben Sie die Valenzsequenz des abgebildeten Graphen an.

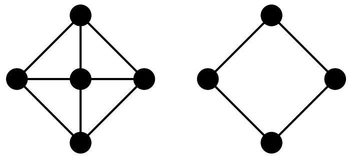
Lösung:

Sie lautet: (4,3,3,3,3,2,2,2,2)

(b) Bestimmen Sie einen Graphen mit dieser Valenzsequenz, der nicht isomorph zum abgebildeten Graphen ist. Beweisen Sie die Nichtisomorphie der beiden Graphen.

Lösung:

Ein anderer Graph mit obiger Valenzsequenz ist



Dieser ist nicht isomorph zu dem Graphen aus der Aufgabenstellung, da er nicht zusammenhängend ist, letzterer aber zusammenhängend ist.

Aufgabe 4.
Seien $m,n \geq 1$.

(a) Für welche m,n hat der vollständige bipartite Graph $K_{m,n}$ eine Eulertour?

Lösung:

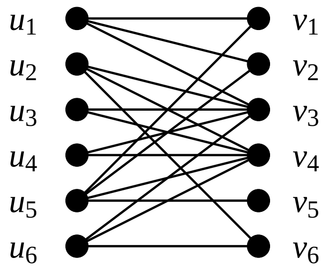
Im $K_{m,n}$ haben die Knoten der einen Seite den Grad n, die der anderen Seite den Grad m. Der Graph hat eine Eulertour genau dann, wenn er zusammenhängend ist und alle Knotengrade gerade sind, also hier genau dann, wenn n und m gerade sind (da für $m,n \geq 1$ der $K_{m,n}$ immer zusammenhängend ist).

(b) Sei $K_{n,n} - M_n$ der Graph, der aus dem vollständigen bipartiten Graph $K_{n,n}$ durch Löschen eines perfekten Matchings entsteht. Für welche n hat $K_{n,n} - M_n$ eine Eulertour?

Lösung:

In $K_{n,n} - M_n$ sind die Knotengrade alle $n-1$. Notwendige Bedingung dafür, dass der Graph eine Eulertour hat, ist also, dass $n-1$ gerade ist, bzw. n ungerade. Falls $n = 1$, so ist der Graph aber nicht zusammenhängend. Falls $n \geq 3$, so ist er zusammenhängend. Also hat $K_{n,n} - M_n$ genau dann eine Eulertour, falls $n \geq 3$ ungerade ist.

Aufgabe 5.
Beweisen oder widerlegen Sie: Der unten abgebildete bipartite Graph hat ein perfektes Matching.



Lösung:
Es gilt für die Menge der Nachbarn von v_1, v_2, v_5:

$$N(\{v_1, v_2, v_5\}) = \{u_1, u_5\}$$

und somit

$$|N(\{v_1, v_2, v_5\})| = 2 < 3 = |\{v_1, v_2, v_5\}|.$$

Nach dem Heiratssatz von Hall kann der bipartite Graph also kein perfektes Matching haben.

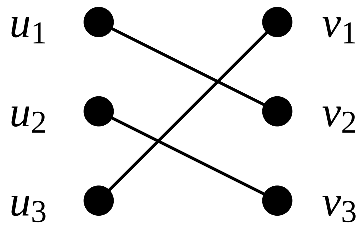
Aufgabe 6.

Bestimmen Sie für die folgende Probleminstanz eine männeroptimale und eine frauenoptimale stabile Hochzeit. Die Menge der Männer sei $U := \{u_1, u_2, u_3\}$ und die Menge der Frauen $V := \{v_1, v_2, v_3\}$. Die Präferenzen der einzelnen Personen sind durch die unten angegebenen Präferenzlisten definiert, wobei $a : \ (x, y, z)$ bedeutet, dass Person a die Person x am liebsten und Person z am wenigsten gerne mag.

$$\begin{array}{ll} u_1 : \ (v_1, v_3, v_2) & \quad v_1 : \ (u_2, u_3, u_1) \\ u_2 : \ (v_3, v_2, v_1) & \quad v_2 : \ (u_3, u_1, u_2) \\ u_3 : \ (v_1, v_2, v_3) & \quad v_3 : \ (u_2, u_1, u_3) \end{array}$$

Lösung:

u_2 und v_3 mögen sich gegenseitig am liebsten, d.h. sie bilden in jeder stabilen Hochzeit ein Paar. Streicht man sie in den Listen der anderen, mögen sich nun u_3 und v_1 gegenseitig am liebsten. Auch sie bilden in jeder stabilen Hochzeit ein Paar. Dann bleibt für den Rest nur die Paarung von u_1 und v_2. Hier gibt es also nur eine stabile Hochzeit, diese ist männer- und frauenoptimal.



Aufgabe 7.

Bestimmen Sie $\operatorname{cond}(A)$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Matrixnormen $||\cdot||_1$ bzw. $||\cdot||_\infty$.

Lösung:

Es gilt:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Somit ist in der Spaltensummennorm $||A||_1 = 12$, $||A^{-1}||_1 = 10$, also

$$\operatorname{cond}_1(A) = ||A||_1 \cdot ||A^{-1}||_1 = 12 \cdot 10 = 120.$$

In der Zeilensummennorm haben wir $||A||_\infty = 10$, $||A^{-1}||_\infty = 12$, also ebenfalls

$$\operatorname{cond}_\infty(A) = ||A||_\infty \cdot ||A^{-1}||_\infty = 10 \cdot 12 = 120.$$

Aufgabe 8.
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 \\ -2 & 10 & 2 \\ 8 & 2 & 21 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung von A.

(b) Zeigen Sie, dass die Matrix positiv definit ist und geben Sie die Cholesky-Faktorisierung an.

Lösung:
Wir bestimmen die Cholesky-Faktorisierung.
$\ell_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}} = \sqrt{4} = 2$
$\ell_{2,1} = \frac{a_{2,1}}{\ell_{1,1}} = \frac{-2}{2} = -1$
$\ell_{3,1} = \frac{a_{3,1}}{\ell_{1,1}} = \frac{8}{2} = 4$
$\ell_{2,2} = \sqrt{a_{2,2} - \ell_{2,1}^2} = \sqrt{10 - (-1)^2} = 3$
$\ell_{3,2} = \frac{a_{3,2} - \ell_{3_1}\ell_{2,1}}{\ell_{2,2}} = \frac{2-4\cdot(-1)}{3} = 2$
$\ell_{3,3} = \sqrt{a_{3,3} - \ell_{3,1}^2 - \ell_{3,2}^2} = \sqrt{21 - 4^2 - 2^2} = 1$
Insgesamt erhalten wir also

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 \\ -2 & 10 & 2 \\ 8 & 2 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Cholesky-Zerlegung ist natürlich auch eine LU-Zerlegung. Da die Diagonaleinträge positiv sind und die Cholesky-Faktorisierung überhaupt möglich war, ist die Matrix A positiv definit.

Aufgabe 9.
Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lccccccc} \min & (x-1)^2 & + & (y-2)^2 & + & z^2 & & \\ \text{unter} & x^2 & + & y^2 & + & z^2 & = & 20. \end{array}$$

Lösung:
Sei $f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2$ und $h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 20$. Dann gelten:

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,x) &= (2x-2, 2y-4, 2z) \\ \nabla h(x,y,z) &= (2x, 2y, 2z) \\ \nabla^2 f(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \nabla^2 h(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da $(0,0,0)$ kein zulässiger Punkt ist, ist $\nabla h(x,y,z) \neq (0,0,0)$ für jeden zulässigen Punkt, also ist $\nabla h(x,y,z)$ linear unabhängig, also ist jeder zulässige Punkt ein regulärer Punkt der Nebenbedingungen. Somit gelten, falls (x,y,z) Minimalstelle ist, die Kuhn-Tucker-Bedingungen: Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla h(x,y,z)$ und $h(x,y,z) = 0$, d.h.

$$\begin{aligned} 2x-2 &= 2\lambda x & (1)\\ 2y-4 &= 2\lambda y & (2)\\ 2z &= 2\lambda z & (3)\\ x^2+y^2+z^2 &= 20 & (4) \end{aligned}$$

(3) ist äquivalent zu $2z(1-\lambda) = 0$, d.h. entweder $z = 0$ oder $\lambda = 1$. Letzteres kann aber nicht sein, da sonst aus (1) oder (2) ein Widerspruch folgen würde. Also ist $\lambda \neq 1$ und $z = 0$. Dann folgen aber aus (1) und (2)

$$x = \frac{1}{1-\lambda}, \qquad y = \frac{2}{1-\lambda},$$

also $y = 2x$. Setzen wir dies in (4) ein, so erhalten wir

$$5x^2 = 20,$$

also erhalten wir die beiden Lösungen $(x,y,z) = (2,4,0)$, $\lambda = \frac{1}{2}$, bzw. $(x,y,z) = (-2,-4,0)$, $\lambda = \frac{3}{2}$. Beim Kandidaten $(x,y,z) = (2,4,0)$ für eine Extremalstelle handelt es sich tatsächlich um ein lokales Minimum, da

$$L = \nabla^2 f(x,y,z) - \frac{1}{2}\nabla^2 h(x,y,z)$$

positiv definit ist. Beim Kandidaten $(x,y,z) = (-2,-4,0)$ handelt es sich dagegen um ein lokales Maximum, da

$$L = \nabla^2 f(x,y,z) - \frac{3}{2}\nabla^2 h(x,y,z)$$

negativ definit ist. Da

$$\{(x,y,z) | h(x,y,z) = 0\}$$

kompakt ist und an der Stelle $(2,4,0)$ das einzige lokale Minimum vorliegt, handelt es sich bei diesem um ein globales Minimum (mit Zielfunktionswert 5).

Aufgabe 10.
Sei $f:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := -x^4 + \frac{20}{3}x^3 - 14x^2 + 12x + x^2y^2.$$

(a) Führen Sie einen Schritt des Newtonverfahrens zur Bestimmung eines lokalen Extremums von f, ausgehend von $(x_0,y_0) = (2,0)$, aus.

Lösung:

Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= (-4x^3+20x^2-28x+12+2xy^2, 2x^2y) \\
\nabla f(2,0) &= (4,0) \\
\nabla^2 f(x,y) &= \begin{pmatrix} -12x^2+40x-28+2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix} \\
\nabla^2 f(2,0) &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \\
[\nabla^2 f(2,0)]^{-1} &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Somit wird im ersten Schritt des Newtonverfahrens

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

berechnet.

(b) Bricht das Verfahren nach dem ersten Schritt ab?

Lösung:

Es gilt: $\nabla f(1,0) = (0,0)$, d.h. das Verfahren bricht ab, da ein stationärer Punkt gefunden wurde.

Aufgabe 11.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und Q eine symmetrische, positiv definite $(n \times n)$-Matrix. Sei ferner $f:\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^\top Qx$.

Zeigen Sie (**ohne** Benutzung von Beispiel 7.1.4): f ist strikt konvex.

Lösung:

Seien $x,y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$ und $0 < \lambda < 1$. Zu zeigen ist

$$
f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).
$$

Dies tun wir wie folgt:

$$
\begin{aligned}
& \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)x) \\
= {} & \lambda x^\top Qx + (1-\lambda)y^\top Qy - (\lambda x + (1-\lambda)y)^\top Q(\lambda x + (1-\lambda)y) \\
= {} & \lambda x^\top Qx + (1-\lambda)y^\top Qy - \lambda^2 x^\top Qx - 2\lambda(1-\lambda)x^\top Qy - (1-\lambda)^2 y^\top Qy \\
= {} & (\lambda - \lambda^2)x^\top Qx + (\lambda - \lambda^2)y^\top Qy - 2\lambda(1-\lambda)x^\top Qy \\
= {} & \lambda(1-\lambda)[x^\top Qx + y^\top Qy - 2x^\top Qy] \\
= {} & \underbrace{\lambda}_{>0}\underbrace{(1-\lambda)}_{>0}\underbrace{(x-y)^\top}_{\neq 0} Q \underbrace{(x-y)}_{\neq 0} \\
> {} & 0
\end{aligned}
$$

Hierbei folgt die letzte Abschätzung aus der positiven Definitheit von Q.

Aufgabe 12.
Lösen Sie folgendes Optimierungsproblem mit Hilfe des Simplexalgorithmus. Verwenden Sie Bland's Rule.

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 2x & + & y & & \\ \text{s.d.} & x & + & y & \leq & 16 \\ & -3x & + & y & \geq & 12 \\ & 5x & - & 2y & \geq & -38 \\ & & & x,y & \geq & 0 \end{array}$$

(a) Bringen Sie das Problem in Standardform und stellen Sie das Hilfsproblem für Phase I auf.

Lösung:

Die Standardform lautet:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr} \max & 2x & + & y & & & & & & & & \\ \text{s.d.} & x & + & y & + & z_1 & & & & & = & 16 \\ & -3x & + & y & & & - & z_2 & & & = & 12 \\ & -5x & + & 2y & & & & & + & z_3 & = & 38 \\ & & & & & & & & x,y,z_1,z_2, & z_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Das Hilfsproblem für Phase I lautet:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr} \max & & & & & & & & & & - & w & & \\ \text{s.d.} & x & + & y & + & z_1 & & & & & & & = & 16 \\ & -3x & + & y & & & - & z_2 & & & + & w & = & 12 \\ & -5x & + & 2y & & & & & + & z_3 & & & = & 38 \\ & & & & & & & & & & x,y,z_1,z_2,z_3, & w & \geq & 0 \end{array}$$

(b) Führen Sie Phase I durch.

Lösung:

Das Starttableau sieht nach (a) durch einmaliges Wegpivotieren von $-w$ in der künstlichen Zielfunktion wie folgt aus:

$$\begin{array}{rrrrrr|r} -3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 12 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ -3 & \boxed{1} & 0 & -1 & 0 & 1 & 12 \\ -5 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 38 \end{array}$$

Ein Pivotschritt liefert:

$$\begin{array}{rrrrrr|r}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
\hline
5 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -12 \\
\hline
4 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 4 \\
-3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 12 \\
1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 14
\end{array}$$

Da in der künstlichen Zielfunktion keine positiven Koeffizienten mehr vorkommen, ist Phase I beendet. Da der künstliche Zielfunktionswert 0 ist, haben wir eine zulässige Basislösung gefunden.

(c) Sofern möglich, führen Sie Phase II durch. Falls nicht, erklären Sie, weshalb Phase II nicht durchführbar ist. Geben Sie eine Optimallösung an, sofern eine existiert.

Lösung:

Nach Löschen der künstlichen Zielfunktion und der künstlichen Variablen erhalten wir als Starttableau für Phase II:

$$\begin{array}{rrrrr|r}
5 & 0 & 0 & 1 & 0 & -12 \\
\hline
\boxed{4} & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\
-3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 12 \\
1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 14
\end{array}$$

Wir pivotieren gemäß Bland's Rule in der ersten Spalte und erhalten:

$$\begin{array}{rrrrr|r}
0 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -17 \\
\hline
1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 1 \\
0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 15 \\
0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} & 1 & 13
\end{array}$$

Die reduzierten Kosten sind alle nichtpositiv, d.h. wir haben eine Optimallösung gefunden. Sie lautet

$$(x, y, z_1, z_2, z_3) = (1, 15, 0, 0, 13)$$

mit optimalem Zielfunktionswert 17.