Lösungsskizzen zu den Klausuraufgaben zum Kurs 1142 Algorithmische Mathematik

1142KWL07

Aufgabe 1.

Induktionsanfang: Für $n = 4$ lautet die Aussage $4! = 24 > 2^4 = 16$, was offenbar richtig ist.
Induktionsvoraussetzung: Es sei $(n-1)! > 2^{n-1}$.
Induktionsschritt:

$$n! = n \cdot (n-1)! \overset{\text{IV}}{>} n2^{n-1} \overset{n \geq 4}{>} 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n.$$

Aufgabe 2.

a) $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, mit $u \mapsto |u^2 - 5| + 1$
Die ersten Funktionswerte sind: $0 \mapsto 6$, $1 \mapsto 5$, $2 \mapsto 2$, $3 \mapsto 5, \ldots$ Wegen $f_1(1) = f_1(3) = 5$ ist die Funktion nicht injektiv. Da für $u \geq 3$ die Betragsstriche überflüssig sind und die Funktion dann streng monoton wächst, wird z. B. der Funktionswert 1 von keinem Urbild angenommen. Also ist die Funktion auch nicht surjektiv und natürlich auch nicht bijektiv.

b) $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, mit $u \mapsto u + (-1)^u$
Seien $u \neq v \in \mathbb{N}$ und o.B.d.A. $u > v$. Dann ist $f_2(u) - f_2(v) = u - v + (-1)^u - (-1)^v$. Wir führen Fallunterscheidung durch:

- u, v beide gerade oder beide ungerade: Dann ist $f_2(u) - f_2(v) = u - v \geq 2 > 0$
- u gerade, v ungerade oder umgekehrt: Dann ist $u - v$ ungerade und $(-1)^u - (-1)^v \in \{2, -2\}$. Also ist deren Summe und somit auch $f_2(u) - f_2(v)$ ungleich Null. Somit folgt aus $u \neq v$ auch $f_2(u) \neq f_2(v)$ und die Funktion ist injektiv.

  Für ein beliebiges $u \in \mathbb{N}$ gilt für $v := u + (-1)^u \in \mathbb{N}$, dass $f(v) = u + (-1)^u + (-1)^{u-(-1)^u} = u + (-1)^u + (-1)^u(-1)^{(-1)^u} = u + (-1)^u - (-1)^u = u$. Also ist die Funktion surjektiv und zusammen mit der eben gezeigten Injektivität auch bijektiv.

Aufgabe 3.

a) Wenn sie
   i) höchstens einmal am Tag ins Fitness-Studio geht, dann kann sie von den 7 möglichen Tagen 3 beliebige auswählen, wofür es $\binom{7}{3} = 35$ Möglichkeiten gibt.
   ii) höchstens einmal am Tag aber nicht drei Tage hintereinander ins Studio geht, gibt es genau 5 Möglichkeiten weniger als in (i), da genau die Möglichkeiten MoDiMi, DiMiDo, MiDoFr, DoFrSa, FrSaSo nicht erlaubt sind, also insgesamt 30 Möglichkeiten.

b) Wir betrachten das Problem aus Peters Sicht. Von den 7 möglichen Tagen sind für ihn 3 günstig. Also ist die Wahrscheinlichkeit eines Treffens $\frac{3}{7}$.

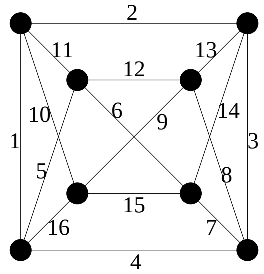
Aufgabe 4.

Gegeben $R \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ mit $(x, y) \in R \iff |x - y| \leq \min\{|x|, |y|\}$

a) reflexiv: Offenbar ist für alle $x \in \mathbb{Q}$ $|x - x| = 0 \leq \min\{|x|, |x|\} = |x|$, da $|x| \geq 0$ ist. Also gilt Reflexivität.

b) symmetrisch: Gilt offenbar, da $|x-y| = |y-x|$ und $\min\{|x|,|y|\} = \min\{|y|,|x|\}$ für alle $x,y \in \mathbb{Q}$.
c) antisymmetrisch: Sei $x = 2$ und $y = 1$. Dann ist $(x,y) \in R$ und $(y,x) \in R$, aber $x \neq y$. Also ist R nicht antisymmetrisch.
d) transitiv: Es gilt $(1,2) \in R$ und $(2,3) \in R$, aber $(1,3) \notin R$, da $|1-3| = 2 > 1 = \min\{1,3\}$. Also ist R nicht transitiv.

Aufgabe 5.
Ein Graph ist genau dann eulersch, wenn er zusammenhängend ist und jeder Knoten geraden Knotengrad hat. Da der gegebene Graph 4-regulär ist (jeder Knoten hat Grad 4), ist dies der Fall.
Wir bezeichnen die Kanten wie folgt:

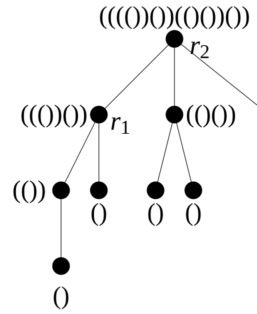


Dann ist $1,\dots,16$ eine Eulertour. Eine Zerlegung in kantendisjunkte Kreise lautet

$$\{1,2,3,4\},\ \{10,11,12,13,14,15\},\ \{5,6,7,8,9,16\}.$$

Aufgabe 6.
Wir bilden man die Summe aller Knotengrade. Da jede Kante, die keine Schleife ist, zu genau zwei Knoten inzident ist und Schleifen an einem Knoten doppelt gezählt werden, ist $2|E| = \sum \deg(v)$ und somit, insbedondere auch für Multigraphen, die Summe der Knotengrade gerade.

Aufgabe 7.
a) Die Pflanzung wird rekursiv so definiert, dass die Teilbäume, die durch die direkten Nachfolger eines Knotens definiert sind, nach ihrem Code lexikographisch aufsteigend von links nach rechts sortiert sind.
b) Die Exzentrizität eines Knotens v ist $\max_{w \in V} \operatorname{dist}(v,w)$. Das Zentrum sind die Knoten minimaler Exzentrizität. Bei Bäumen ist das Zentrum entweder ein einzelner Knoten oder zwei adjazente Knoten. Im ersten Fall nehmen wir den Zentrumsknoten als Wurzel. Im zweiten Fall nehmen wir den Knoten, auf dessen Seite der Baum mit dem lexikographisch kleineren Code steht.
c) Gegeben ist folgender Klammerausdruck $((((())())(()())()))$:
   i) Da der Ausdruck wohlgeklammert ist, handelt es sich um den Code eines gepflanzten Baums, nämlich des folgenden:



ii) In der Abbildung kann man erkennen, dass an den Nachfolgern eines Knotens die Untercodes lexikographisch aufsteigend sortiert sind. Also handelt es sich um den Code eines Wurzelbaums mit Wurzel r_2.

iii) Die Zentrumsknoten sind r_1 und r_2 mit Exzentrizität 3. Der Teilbaum an r_1 hat den Code ((())()), was lexikographisch größer ist als der Code des Teilbaums an r_2, nämlich ((()())()). Also muss beim Codieren r_2 als Wurzel gewählt werden und es handelt sich bei dem Ausdruck um den korrekten Code eines Baums.

Aufgabe 8.
Wir stellen die erweiterte Koeffizientenmatrix auf:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & -2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & -7 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-12} & -12 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Also ist $(x,y,z) = (1,-1,1)$ eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems.

Aufgabe 9.
Die Inverse von $A := \left(\begin{smallmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 8 \end{smallmatrix}\right)$ ist $A^{-1} = \frac{1}{2\cdot 8-3\cdot 6}\left(\begin{smallmatrix} 8 & -6 \\ -3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Somit sind die benötigten Werte für die Zeilensummennorm

$$\|A\|_\infty = 11, \quad \|A^{-1}\|_\infty = 7, \quad \operatorname{cond}(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 77$$

und bezüglich der Spaltensummennorm

$$\|A\|_1 = 14, \quad \|A^{-1}\|_1 = \frac{11}{2}, \quad \operatorname{cond}(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 = 77.$$

Aufgabe 10.
Für den ganzzahligen Teil gilt $10_{(8)} = 8_{(10)} = 11_{(7)}$. Nun betrachten wir noch den gebrochenen

Teil $0.1_{(8)} = \frac{1}{8}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \div \frac{1}{7} &= 0 \text{ Rest } \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \div \frac{1}{49} &= \text{ Rest } \frac{1}{392} \\ \frac{1}{392} \div \frac{1}{343} &= 0 \text{ Rest } \frac{1}{392} \quad \left(= \frac{1}{7^2} \cdot \frac{1}{8}\right) \end{aligned}$$

Also ist $10.1_{(8)} = 11.\overline{06}_{(7)}$.

Aufgabe 11.
Die Nebenbedingungen sind $h(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$
Wir berechnen die Gradienten und Hessematrizen:

$$\nabla f(x,y) = (2x-2, 2y), \quad \nabla h(x,y) = (2x, 2y), \quad \nabla^2 f(x,y) = \nabla^2 h(x,y) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right).$$

Die Kuhn-Tucker-Bedingungen lauten also

$$(x,y) \text{ ist Extremalstelle} \Longrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}: \begin{array}{lcl} 2x-2 & = & \lambda \cdot 2x \\ 2y & = & \lambda \cdot 2y. \end{array}$$

Ist $y \neq 0$, so folgt aus der zweiten Gleichung $\lambda = 1$ und mit der ersten Gleichung $2x - 2 = 2x$. Widerspruch. Also muss $y = 0$ gelten. Wir stellen die erste Kuhn-Tucker-Gleichung nach x um und erhalten $x = \frac{1}{1-\lambda}$. Setzen wir dies zusammen mit $y = 0$ in h ein, so erhalten wir

$$x^2 = 4 \iff \frac{1}{(1-\lambda)^2} = 4 \iff |2 - 2\lambda| = 1 \iff \lambda \in \{\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\}.$$

Daraus erhalten wir $x \in \{2, -2\}$. Also sind $(-2,0)$ und $(2,0)$ die einzigen Kandidaten für Extrema.
Nun berechnen wir die L-Matrix:

$$L = \nabla^2 f(x,y) - \lambda \nabla^2 h(x,y) = \left(\begin{smallmatrix} 2-2\lambda & 0 \\ 0 & 2-2\lambda \end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) & \text{für } \lambda = \frac{1}{2} \\ \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) & \text{für } \lambda = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Also ist L für $\lambda = \frac{1}{2}$ positiv definit und $(2,0)$ striktes lokales Minimum und für $\lambda = \frac{3}{2}$ ist L negativ definit und daher $(-2,0)$ striktes lokales Maximum von f.

Aufgabe 12.
Wir bringen zunächst das Problem in die Normalform, indem wir Schlupfvariablen einführen:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \max & -2x_1 & + & x_2 & & & & & & \\ \text{unter} & 2x_1 & + & x_2 & + & s_1 & & & = & 4 \\ & -x_1 & + & x_2 & & & - & s_2 & = & 1 \\ & & & & & & & x_1, x_2, s_1, s_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Um einen zulässigen Punkt zu ermitteln führen wir weiterhin eine künstliche Schlupfvariable ein und lösen folgendes Hilfsproblem:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\max & -z & & & & & & & & & & \\
\text{unter} & 2x_1 & + & x_2 & + & s_1 & & & & & = & 4 \\
 & -x_1 & + & x_2 & & & - & s_2 & + & z & = & 1 \\
 & & & & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1,x_2,s_1,s_2,z} & \geq & 0
\end{array}
$$

Dies liefert folgendes Tableau, in dem wir die eigentliche Zielfunktion gleich mitführen:

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
\hline
-2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
-1 & 1 & 0 & -1 & \boxed{1} & 1
\end{array}
\rightsquigarrow
\begin{array}{rrrrr|r}
-1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
\hline
-2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
-1 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 1
\end{array}
\rightsquigarrow
$$

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
\hline
-1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\
\hline
3 & 0 & 1 & \boxed{1} & -1 & 3 \\
-1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1
\end{array}
\overset{\text{Phase II}}{\rightsquigarrow}
\begin{array}{rrrr|r}
-4 & 0 & -1 & 0 & -4 \\
\hline
3 & 0 & 1 & 1 & 3 \\
2 & 1 & 1 & 0 & 4
\end{array}
$$

Dieses Tableau ist optimal und wir erhalten als Lösung $(x_1,x_2) = (0,4)$ mit Zielfunktionswert 4. Der erste zulässige Punkt auf dem Iterationsweg war $(x,y) = (0,1)$ in Tableau 3.