Aufgabe 1.

5 Punkte Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Aufgabe 2.

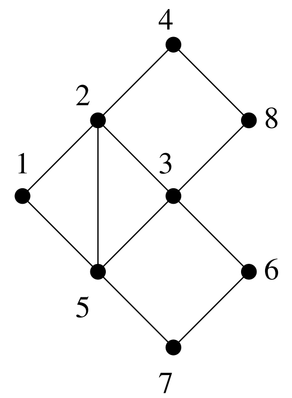
Sie spielen das folgende Spiel mit einem Spielmacher: Eine faire Münze wird geworfen. Zeigt diese Kopf, so müssen Sie B Euro bezahlen und das Spiel endet sofort. Zeigt die Münze Zahl, so zahlt der Spielmacher 2 Euro an Sie und das Spiel wird wiederholt, sofern die Münze nicht bereits dreimal geworfen wurde. Nach dreimaligem Werfen der Münze und der zugehörigen Auszahlung endet das Spiel auf jeden Fall.

4 Punkte (a) Sei $B = 4$. Was ist Ihr erwarteter Gewinn bzw. Verlust bei dem Spiel?

4 Punkte (b) Wie muss der Betrag B gewählt werden, so dass Sie im Erwartungswert weder Gewinn noch Verlust machen?

Aufgabe 3.

Betrachten Sie den im Folgenden abgebildeten Graphen $G = (V, E)$:



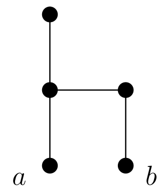
2 Punkte (a) Bestimmen Sie den Breitensuchbaum T von G, startend bei Knoten 1, wobei von den unbesuchten Nachbarn eines Knotens immer zuerst jene mit der kleinstmöglichen Nummer hinzugenommen werden.

2 Punkte (b) Zeigen Sie, dass G eulersch ist, und geben Sie eine Eulertour von G, startend von Knoten 1, an.

3 Punkte (c) Versehen Sie den Graph G mit Kantengewichten $1, 2, 3, \ldots, 11$ in der Reihenfolge des Durchlaufs der Kanten in der Eulertour aus (b) und bestimmen Sie einen minimalen aufspannenden Baum dieses gewichteten Graphen.

Aufgabe 4.

Betrachten Sie den im Folgenden abgebildeten Graphen $H=(V,E)$, den sogenannten *Stuhl*:



1 Punkt (a) Zeigen oder widerlegen Sie: H ist bipartit.

1 Punkt (b) Zeigen oder widerlegen Sie: H ist 2-zusammenhängend.

1 Punkt (c) Zeigen oder widerlegen Sie: H ist eulersch.

3 Punkte (d) Bestimmen Sie die Anzahl der Spaziergänge der Länge 8 in H von a nach b.

1 Punkt (e) Geben Sie ein maximales Matching in H an und beweisen Sie seine Maximalität.

3 Punkte (f) Zeigen Sie: Jeder Graph mit Valenzsequenz $(3,2,1,1,1)$ ist isomorph zu H.

5 Punkte (g) Für welche $n \in \mathbb{N}$ existiert ein Graph mit Valenzsequenz

$$(3,2,\underbrace{1,1,1,\ldots,1}_{n \text{ Einsen}})?$$

Beweisen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 5.

3 Punkte Sei $G=(V,E)$ ein kreisfreier Graph mit $|E| \geq 1$, bei dem für alle Knoten $v \in V$ gilt:

$$\deg(v) \leq 2.$$

Zeigen Sie, dass G ein Blatt enthält.

Aufgabe 6.

5 Punkte Gegeben sind eine Menge $U=\{A,B,C\}$ von Männern und $V=\{1,2,3\}$ von Frauen. Diesen sind jeweils Präferenzlisten $j:(i_1,i_2,i_3)$ zugeordnet, die so zu lesen sind, dass Person j Person i_1 am liebsten mag und Person i_3 am wenigsten gerne.

$$\begin{array}{ll} A:(1,2,3) & 1:(B,C,A) \\ B:(2,1,3) & 2:(A,C,B) \\ C:(2,3,1) & 3:(A,C,B) \end{array}$$

Bestimmen Sie eine stabile Hochzeit mit dem Algorithmus Men-Propose-Women-Dispose.

Aufgabe 7.

4 Punkte Geben Sie eine Auswertungsvorschrift für das Polynom

$$3+4x+5x^2+2x^3+7x^4$$

an, die nur 4 Multiplikationen und nur 4 Additionen benötigt und keine weiteren Rechenoperationen.
Tipp: Horner-Schema

Aufgabe 8.

Sei

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 26 \end{pmatrix}.$$

1 Punkt (a) Berechnen Sie $\|A\|_\infty$.

3 Punkte (b) Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung von A.

3 Punkte (c) Zeigen Sie: A ist positiv definit.

Aufgabe 9.

9 Punkte Lösen Sie folgendes Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lllll} \min & (x-1)^2 & + & (y-2)^2 & \\ \text{unter} & (x+2)^2 & + & (y-2)^2 & \leq & 1. \end{array}$$

Aufgabe 10.

Die Funktion $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x)=x^3+x-5.$$

6 Punkte (a) Führen Sie drei Schritte des Newtonverfahrens zur Bestimmung eines lokalen Minimums der Funktion f durch, der Startpunkt sei $x_0=1$.

1 Punkt (b) Konvergiert das Newtonverfahren aus (a)?

1 Punkt (c) Besitzt die Funktion f ein lokales Minimum? Wenn ja, wie lautet ein solches?

Aufgabe 11.

4 Punkte Zeigen Sie: Die Menge

$$K:=\{(x,y)^\top\in\mathbb{R}^2 \mid y\geq|x|\}$$

ist konvex.

Aufgabe 12.

7 Punkte (a) Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max & x_1 & + & 10x_2 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
 & & & x_2 & \leq & 3 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

mit einer Methode Ihrer Wahl.

5 Punkte (b) Ein Medikament soll aus drei Komponenten K1, K2 und K3 möglichst kostengünstig zusammengemischt werden. Dabei enthalten die Komponenten die beiden benötigten Wirkstoffe W1 und W2 in unterschiedlicher Konzentration. Die Menge an Wirkstoff Wi in Milligramm pro Gramm der Komponente Kj, ebenso wie der Einkaufspreis von Komponente Kj in Euro pro Gramm sind aus der Tabelle unten ablesbar. Als Mindestvorgabe haben wir, dass von Wirkstoff W1 mindestens 1 Milligramm im Medikament enthalten sein muss und von Wirkstoff W2 mindestens 10 Milligramm.

Gehalt	K1	K2	K3
W1 [mg/g]	1	2	0
W2 [mg/g]	1	1	1
Einkaufspreis [€/g]	4	6	3

Modellieren Sie das Problem als lineares Programm.

3 Punkte (c) Bestimmen Sie eine Optimallösung des linearen Programms aus (b) mit Hilfe der Lösung von (a).

Tipp zu (c): Satz vom komplementären Schlupf