**Aufgabe 1.**

*5 Punkte* Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: 2 teilt $(5^n + n^2 + n + 3)$.

**Aufgabe 2.**

Sei $A := \{1,2,3,4,5\}$. Die Funktion $f: A \longrightarrow A$ sei definiert durch

$$f(x) := 6 - x$$

für alle $x \in A$.

*4 Punkte* (a) Zeigen Sie, dass $f$ injektiv und surjektiv ist, es sich bei $f$ also um eine Permutation handelt.

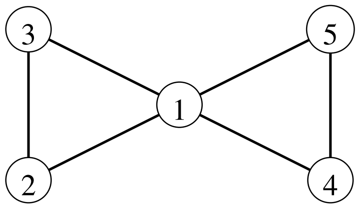
*2 Punkte* (b) Wie lautet die Zerlegung der Permutation $f$ in Zyklen?

**Aufgabe 3.**

*8 Punkte* Zeigen oder widerlegen Sie: $(7,5,4,4,4,3,1,1,1)$ ist Valenzsequenz eines Graphen. Geben Sie auch, falls möglich, einen Graphen mit dieser Valenzsequenz an.

**Aufgabe 4.**

Betrachten Sie den unten abgebildeten Graphen $G = (V,E)$.




$G$

*3 Punkte* (a) Bestimmen Sie die Anzahl der Spaziergänge der Länge 3 von Knoten 1 nach Knoten 2.

*2 Punkte* (b) Zeigen Sie, dass $G$ eulersch ist. Geben Sie eine Eulertour an.

*1 Punkt* (c) Zeigen oder widerlegen Sie: $G$ ist 2-zusammenhängend.

*1 Punkt* (d) Zeigen oder widerlegen Sie: $G$ ist bipartit.

*3 Punkte* (e) Bestimmen Sie die Anzahl der $G$ aufspannenden Bäume.

*2 Punkte* (f) Nun sei die Kantengewichtsfunktion $w: E \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

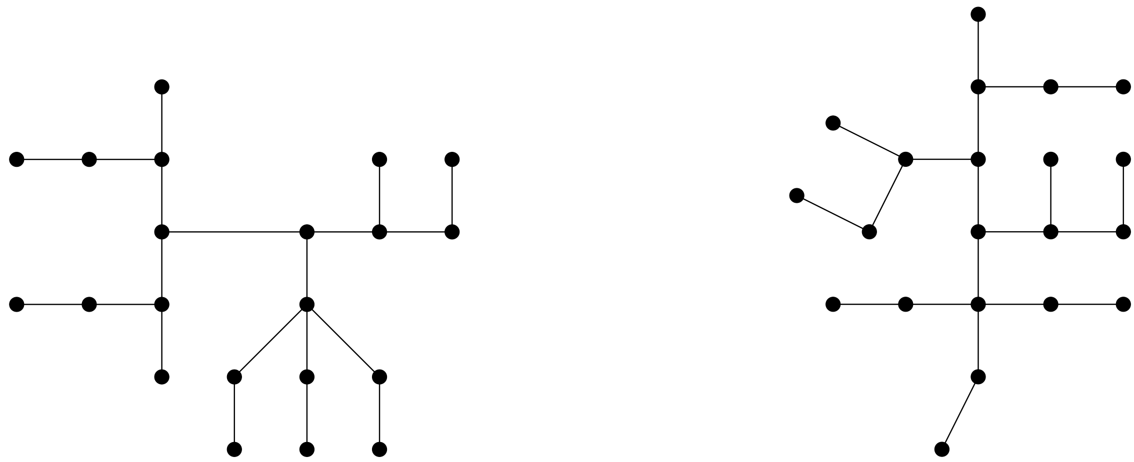
$$w(\{i,j\}) := |i - j|$$

für alle Kanten $\{i,j\} \in E$.

Bestimmen Sie einen minimalen aufspannenden Baum von $G$ bezüglich der Gewichtsfunktion $w$.

**Aufgabe 5.**

*6 Punkte* Betrachten Sie die folgenden beiden Graphen $G_1$ und $G_2$.

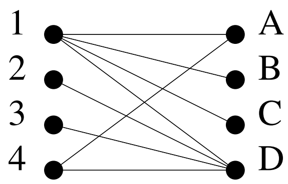


$G_1$ $G_2$

Zeigen oder widerlegen Sie: $G_1$ und $G_2$ sind isomorph.

**Aufgabe 6.**

Betrachten Sie folgenden bipartiten Graphen $G_0$.




$G_0$

*2 Punkte* (a) Bestimmen Sie ein maximales Matching von $G_0$.

*4 Punkte* (b) Beweisen Sie die Maximalität des in (a) gefundenen Matchings.

**Aufgabe 7.**

*4 Punkte* Schreiben Sie die Zahl $\frac{1}{13}$ ins 3er-System um.
*Hinweis:* Alle in der Aufgabenstellung vorkommenden Zahlen sind wie üblich im Zehnersystem notiert.

**Aufgabe 8.**

Zeigen Sie:

*1 Punkt* (a) $\sqrt{10^{1000} + \frac{1}{10^{1500}}} < 10^{501}$

*6 Punkte* (b) $10^{-2001} < \sqrt{10^{1000} + \frac{1}{10^{1500}}} - \sqrt{10^{1000} - \frac{1}{10^{1500}}} < 10^{-1999}$

*Tipp zu (b):* Nutzen Sie für eine stabile Auswertung der Differenz der beiden Wurzelausdrücke die dritte binomische Formel und schätzen Sie das Ergebnis nach oben und unten ab.

**Aufgabe 9.**

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 3 & 10 & -1 & 27 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 8 & 27 & -5 & 78 \end{pmatrix}.$$

*4 Punkte* (a) Bestimmen Sie eine $LU$-Zerlegung von $A$.

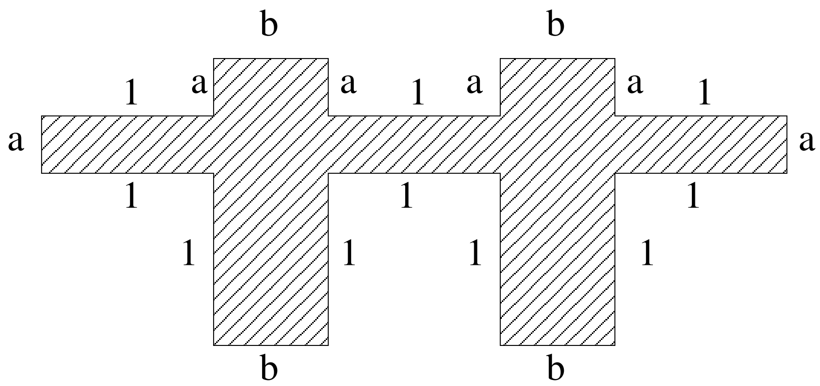
*1 Punkt* (b) Zeigen oder widerlegen Sie: Bei der $LU$-Zerlegung aus (a) handelt es sich um die Cholesky-Faktorisierung von $A$.

*1 Punkt* (c) Zeigen oder widerlegen Sie: 0 ist Eigenwert von $A$.

*1 Punkt* (d) Bestimmen Sie $\|A\|_1$.

**Aufgabe 10.**

Das unten abgebildete Faltmuster ergibt eine oben offene Kiste mit doppeltem Boden und vier Seitenwänden, von denen 3 doppelt verstärkt sind, wobei die Kiste die Höhe $a$, die Breite $b$ und die Länge 1 hat. Der angegebenen Skizze entnimmt man, dass die nicht doppelt verstärkte Seitenwand eine Längsseite ist.




Die Kiste soll ein Volumen von $a \cdot b \cdot 1 = 1$ umschließen und aus einem Faltmuster mit minimaler Fläche gebildet werden. (Wir nehmen an, dass wir den Verschnitt vollständig zu anderen Zwecken verwenden können.)

*5 Punkte* (a) Modellieren Sie das Problem als nichtlineares Optimierungproblem.

*8 Punkte* (b) Lösen Sie dieses.

*Tipp zu (b):* Substitution einer Variablen.

**Aufgabe 11.**

Sei $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := x^2 e^y$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

*4 Punkte* (a) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Funktion $F$ ist konvex.

*3 Punkte* (b) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Menge $F(\mathbb{R}^2)$ ist konvex.

*9 Punkte* **Aufgabe 12.**

Lösen Sie das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrcrcl}
\text{max} & x & - & y & & \\
\text{unter} & x & + & y & \geq & 4 \\
 & -x & + & 2y & \geq & 2 \\
 & 3x & - & y & \leq & 9 \\
 & & & x,y & \geq & 0
\end{array}$$

*Hinweise:* Grafische Lösung ist zulässig. Bei Benutzung von Bland's Rule tauchen in unseren Rechnungen im Simplextableau keine Nenner größer als 5 auf.