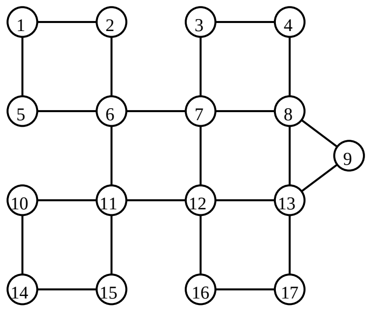
*6 Punkte* **Aufgabe 1.**

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$1+\sum_{k=1}^{n}\left(3k^2+3k+1\right)=(n+1)^3.$$

*6 Punkte* **Aufgabe 2.**

Betrachten Sie folgenden Graphen:




Zeigen oder widerlegen Sie: Der Graph ist eulersch.

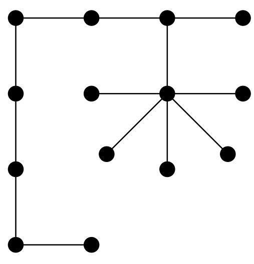
Geben Sie, sofern möglich, eine Eulertour an.

*4 Punkte* **Aufgabe 3.**

Zeigen oder widerlegen Sie: $(8,6,6,6,6,6,3,3,2,2)$ ist Valenzsequenz eines Graphen.

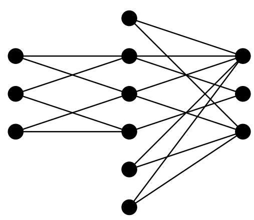
*6 Punkte* **Aufgabe 4.**

Bestimmen Sie den Code des folgenden Baumes. Kommentieren Sie Ihr Vorgehen ausführlich.



*6 Punkte* **Aufgabe 5.**

Zeigen oder widerlegen Sie: Der unten abgebildete Graph ist bipartit und hat ein perfektes Matching.



**Aufgabe 6.**

Schreiben Sie die Dezimalzahl 10,75 um ins

*2 Punkte* (a) Dualsystem bzw. ins

*4 Punkte* (b) Dreiersystem.

**Aufgabe 7.**

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

*4 Punkte* (a) Bestimmen Sie eine $LU$-Zerlegung von $A$.

*4 Punkte* (b) Lösen Sie unter Benutzung der $LU$-Zerlegung das Gleichungssystem

$$Ax = (-4, 0, 0)^\top$$

*2 Punkte* (c) Bestimmen Sie $\|A\|_1$ und $\|A\|_\infty$.

*12 Punkte* **Aufgabe 8.**

Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lccccc} \min & x \cdot e^x & + & 2y \cdot e^y & & \\ \text{unter} & e^x & + & 2e^y & = & 1 \end{array}$$

*Hinweise:* Zum Ableiten Produktregel benutzen. Ferner gilt $\frac{\partial}{\partial x} e^x = e^x$.

**Aufgabe 9.**

*4 Punkte* (a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $a_1, \ldots, a_n, c \in \mathbb{R}$. Sei ferner $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1, \cdots, x_n) = c + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

Zeigen oder widerlegen Sie: $f$ ist konvex.

*4 Punkte* (b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^3$ strikt unimodal ist.

*9 Punkte* **Aufgabe 10.**

Lösen Sie mit dem Zwei-Phasen-Simplexalgorithmus folgendes lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lcccccccc} \max & x & + & 2y & + & 3z & & \\ \text{unter} & x & + & y & + & z & \leq & 3 \\ & 2x & + & 2y & + & z & \geq & 4 \\ & & & & & x, y, z & \geq & 0 \end{array}$$

Sie müssen dabei nicht unbedingt Bland's Rule verwenden.

**Aufgabe 11.**
Sei $c \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{R}^m$, $A$ eine reelle $(m \times n)$-Matrix. Gegeben sei das lineare Programm

$$\begin{array}{lrcl} \max & c^\top x & & \\ \text{unter} & Ax & \leq & b. \end{array} \tag{1}$$

*4 Punkte* (a) Bestimmen Sie das dazu duale Programm.

*5 Punkte* (b) Sei $x$ zulässig für (1) und $y$ zulässig für das duale Programm. Zeigen Sie:

$$c^\top x \leq b^\top y.$$

**Aufgabe 12.**
In einer Testgruppe sind Menschen, die mit Wahrscheinlichkeit $10^{-6}$ krank sind und ansonsten gesund. Ein Test stellt bei einem Kranken mit Wahrscheinlichkeit $999 \cdot 10^{-3}$ die Diagnose „krank" aus, ansonsten wird er als „gesund" diagnostiziert. Bei einem Gesunden stellt der Test mit Wahrscheinlichkeit $99 \cdot 10^{-2}$ die Diagnose „gesund", ansonsten „krank".

*3 Punkte* (a) Was ist die Gesamtwahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person krank ist und als gesund diagnostiziert wurde?

*5 Punkte* (b) Man betrachte die Gruppe der Personen, die als „krank" diagnostiziert wurden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Person dieser Gruppe gesund?