Lösungsskizzen zu den Klausuraufgaben zum Kurs 1142 Algorithmische Mathematik

1142L-SS17

Aufgabe 1.

5 Punkte Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$3\sum_{k=1}^{n}(k^2-k) = (n+1)n(n-1)$$

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach n. Für $n = 0$ wird auf der linken Seite gar nichts summiert und man erhält $3 \cdot 0 = 1 \cdot 0 \cdot (-1)$

Sei nun $n > 0$ und die Behauptung für $n-1$ bereits bewiesen, d.h. es gelte:

$$3\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-k) = n(n-1)(n-2)$$

Addition von $3(n^2-n) = 3n(n-1)$ auf beiden Seiten der Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} 3\sum_{k=1}^{n}(k^2-k) &= 3n(n-1)+n(n-1)(n-2) \\ &= (3+n-2)n(n-1) \\ &= (n+1)n(n-1) \end{aligned}$$

Aufgabe 2.

Es sei $f\colon \{1,\ldots 9\} \to \{1,\ldots,9\}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & x > 2 \text{ und } x \text{ gerade} \\ 10-x & \text{sonst} \end{cases}$$

6 Punkte (a) Zeigen Sie, dass f eine Permutation ist.

3 Punkte (b) Bestimmen Sie eine Zykelzerlegung von f.

Lösungsvorschlag:

(a) Entsprechend der Fallunterscheidung setzen wir $A = \{4,6,8\}$ und $B = \{1,2,3,5,7,9\}$. Dann ist $\{1,\ldots,9\} = A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$. Man überzeugt sich, dass wegen $x \in A \Longrightarrow x-2 \in \{1,\ldots 9\}$ und $x \in B \Longrightarrow 10-x \in \{1,\ldots 9\}$ durch die Vorschrift tatsächlich eine Abbildung von $\{1,\ldots,9\}$ nach $\{1,\ldots,9\}$ definiert ist.

Wir zeigen, dass f injektiv ist. Weil Definitions- und Wertebereich die gleiche *endliche* Menge ist, ist f dann auch surjektiv.

(1) Die Einschränkungen $f_{|A}\colon A \to \{1,\ldots 9\}$ und $f_{|B}\colon B \to \{1,\ldots 9\}$ sind injektiv wegen $x-2 = y-2 \Longrightarrow x = y$ und $10-x = 10-y \Longrightarrow x = y$.

(2) Für $a \in A$ und $b \in B$ gilt $f(a) \neq f(b)$: sonst wäre $a-2 = f(a) = f(b) = 10-b$ und somit $a+b = 12$, was jedoch unmöglich ist.

Insgesamt gilt also stets $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$, d.h. f ist injektiv. Alternativ kann man auch eine Wertetabelle für f erstellen

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	9	8	7	2	5	4	3	6	1

und sich davon überzeugen, dass f surjektiv ist.

(b) Für ungerades $x \in \{1,\dots,9\}$ ist $f(x) = 10-x$ wieder ungerade und es ist $f(f(x)) = 10-(10-x) = x$. Mit Ausnahme des Fixpunktes 5 erhält man hier Zykel der Länge 2. Ferner ist $f(2) = 8$, $f(8) = 6$, $f(6) = 4$ und $f(4) = 2$. Insgesamt erhält man folgende Zykelzerlegung:

$$\langle 19\rangle\langle 37\rangle\langle 2864\rangle$$

wobei der Zykel $\langle 5\rangle$ nicht mitnotiert ist.

Aufgabe 3.

Es sei $f\colon A \to B$ eine beliebige Abbildung.

4 Punkte (a) Zeigen Sie: die durch

$$(x,y) \in R \quad\Longleftrightarrow\quad f(x) = f(y)$$

definierte Relation $R \subseteq A \times A$ ist eine Äquivalenzrelation.

3 Punkte (b) Zeigen oder widerlegen Sie: ist $(B,\leq)$ eine Partialordnung, dann ist die durch

$$(x,y) \in R \quad\Longleftrightarrow\quad f(x) \leq f(y)$$

definierte Relation $R \subseteq A \times A$ eine Partialordnung auf A.

Lösungsvorschlag:

(a) Wir weisen nach, dass die Relation R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Reflexivität: Für jedes $x \in A$ gilt $f(x) = f(x)$, also $(x,x) \in R$.

Symmetrie: Sind $x,y \in A$ mit $f(x) = f(y)$, dann ist wegen $f(y) = f(x)$ auch $(y,x) \in R$. $x-y = z$. Dann folgt $y-x = -z \in \mathbb{Z}$, somit gilt $(y,x) \in R$.

Transitivität: Seien $x,y,z \in A$ mit $f(x) = f(y)$ und $f(y) = f(z)$, dann ist auch $f(x) = f(z)$.

Also ist die Relation R eine Äquivalenzrelation.

(b) Im allgemeinen ist die Relation R auf A nicht antisymmetrisch, also keine Partialordnung. Ein konkretes Gegenbeispiel erhält man mit $A = \{1,2\}$, $B = \{0\}$. Für die einzig mögliche Abbildung $f : A \to B$ gilt $f(1) = 0 = f(2)$ und damit sind $(1,2),(2,1) \in R$ aber $1 \neq 2$.

Aufgabe 4.

4 Punkte (a) Entscheiden Sie für die folgenden Sequenzen, ob es sich um Valenzsequenzen eines einfachen Graphen handelt. Begründen Sie Ihre Antwort.

(i) $(4,4,3,2,1,0)$

(ii) $(4,4,3,3,3,1)$

3 Punkte (b) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

Sind $(d_1,\ldots,d_n)$ und $(d'_1,\ldots,d'_n)$ Valenzsequenzen und ist $d_1+d'_1<n$, dann ist auch $(d_1+d'_1,\ldots,d_n+d'_n)$ eine Valenzsequenz.

Hinweis: Was ist $d_1+d'_1<n$ wert, wenn $d_n=d'_n=0$?

Lösungsvorschlag:

(a) Wir testen die Sequenzen mit dem Verfahren nach Havel und Hakimi:

(i) Es ist

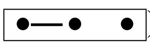
$$(4,4,3,2,1,0) \text{ ist Valenzsequenz } \iff (3,2,1,0,0) \text{ ist Valenzsequenz}$$

Die Sequenz auf der rechten Seite kann jedoch keine Valenzsequenz eines einfachen Graphen sein, weil außer dem Knoten vom Grad 3 nur noch 2 weitere Knoten vom Grad >0 vorhanden sind.

(ii) Es ist

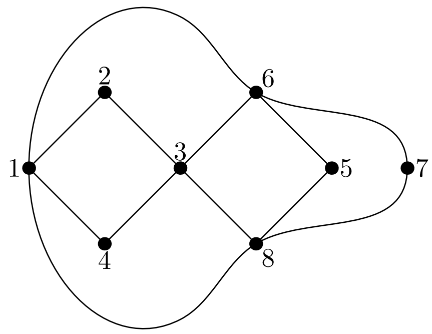
$$\begin{aligned}(4,4,3,3,3,1) \text{ ist Valenzsequenz } &\iff (3,2,2,2,1) \text{ ist Valenzsequenz}\\ &\iff (1,1,1,1) \text{ ist Valenzsequenz}\end{aligned}$$

Die letzte Sequenz $(1,1,1,1)$ ist Valenzsequenz des Graphen . Also ist auch die ursprüngliche Sequenz eine Valenzsequenz.

(b) Die Aussage gilt nicht: wählt man Valenzsequenzen mit $d_n=d'_n=0$ und $d_1+d'_1=n-1$, dann müsste ein einfacher Graph mit Valenzsequenz $(d_1+d'_1,\ldots,d_n+d'_n)$ sowohl einen Knoten vom Grad $n-1$ als auch einen Knoten vom Grad 0 haben, was aber unmöglich ist. Das kleinste Gegenbeispiel ist $d=(1,1,0)=d'$ (die Valensequenz des Graphen ). Die Summe $(2,2,0)$ ist dann keine Valenzsequenz.

Aufgabe 5.

Betrachten Sie den unten abgebildeten Graphen:



1 Punkte (a) Zeigen oder widerlegen Sie: der Graph ist bipartit.

2 Punkte (b) Finden Sie eine Eulertour des Graphen.

4 Punkte (c) Geben Sie eine Ohrenzerlegung des Graphen an.

Lösungsvorschlag:

(a) Die Nummerierung der Knoten ist bereits so gewählt, dass jede Kante einen Endknoten mit gerader Nummer und einen Endknoten mit ungerader Nummer hat. Also ist der Graph bipartit mit den beiden Farbklassen $\{1,3,5,7\}$ und $\{2,4,6,8\}$.

(b) Wir wenden den Algorithmus aus dem Kurs an, wobei wir nur die Folge der besuchten Knoten in den Teiltouren zu notieren. Unser Startknoten ist 1 und an jedem Knoten wählen wir diejenige unbenutzte Kante, der Ende die kleinste Nummer hat.

Die erste Tour ist:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 1 \quad 6 \quad 5 \quad 8 \quad 1$$

längs obiger Tour ist die erste noch unbenutzte Kante bei 3. Dort hängen wir die nächste Tour an

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 8 & 1 \\ & & 3 & 8 & 7 & 6 & 3 & & \end{array}$$

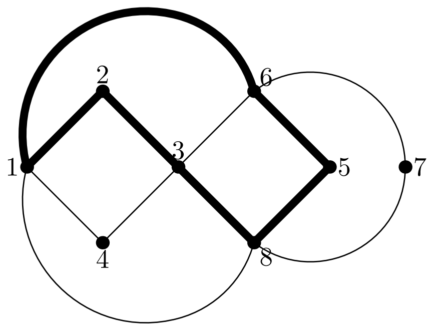
und sehen, dass alle Kanten verbraucht sind. Die gesamte Eulertour ist dann

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 8 \quad 7 \quad 6 \quad 3 \quad 4 \quad 1 \quad 6 \quad 5 \quad 8 \quad 1$$

(c) Wir beginnen mit einem möglichst großen Kreis:

$$C_0 = 1,2,3,6,5,8,1$$

Der Kreis ist in der folgenden Abbildung fett markiert:



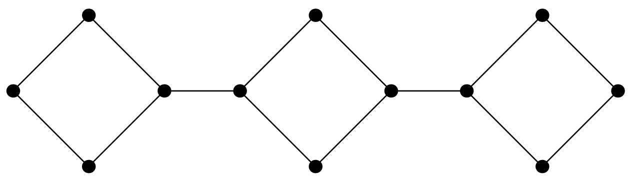
An der Zeichnung kann man nun erkennen, dass man noch vier Pfade anfügen muss

$$P_1 = 1, 8$$
$$P_2 = 1, 4, 3$$
$$P_3 = 3, 6$$
$$P_4 = 6, 7, 8$$

um eine Ohrenzerlegung zu erhalten.

Aufgabe 6.

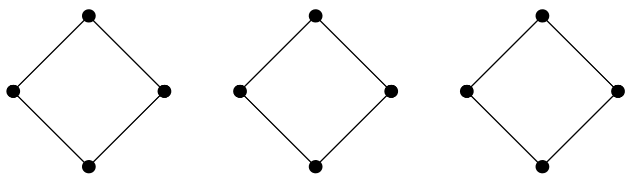
5 Punkte Bestimmen Sie die Anzahl der perfekten Matchings für den folgenden Graphen:



Lösungsvorschlag:

Zunächst stellt man fest, dass ein perfektes Matching keine der beiden Brücken enthalten kann. Denn sobald ein Matching eine der beiden Brücken enthält, kann es in den benachbarten Kreisen nur noch höchstens eine Kante enthalten, so dass dort wenigstens ein Knoten nicht erfasst wird.

Die perfekten Matchings des Graphen entsprechen also den perfekten Matchings des Graphen, den man nach Entfernen der Brücken erhält



wobei ein perfektes Matching sich aus perfekten Matchings der drei Zusammenhangskomponenten zusammensetzt. Ein perfektes Matching des C_4 besteht aus zwei gegenüberliegenden Kanten, der C_4 hat also genau 2 perfekte Matchings. Dementsprechend hat obiger Graph genau 8 perfekte Matchings.

Aufgabe 7.

8 Punkte Es sei $\frac{a}{b}$ ein Bruch in gekürzter Form. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden Aussagen

(i) Die 16-adische Darstellung von $\frac{a}{b}$ hat nur endlich viele von 0 verschiedene Nachkommastellen.

(ii) b ist eine Zweierpotenz.

Lösungsvorschlag:

(i)$\Rightarrow$(ii) Es sei eine abbrechende 16-adischen Darstellung

$$\frac{a}{b} = \sum_{k=0}^{n} c_k 16^{k-m}$$

von $\frac{a}{b}$ gegeben. Multiplikation mit $b \cdot 16^m$ ergibt:

$$a \cdot 16^m = b \cdot \sum_{k=0}^{n} c_k 16^k$$

Ist p ein Primfaktor von b, dann ist p auch Teiler von $a \cdot 16^m$. Weil a und b teilerfremd sind, muss p ein Teiler von 16^m und damit $p = 2$ sein. Also ist b eine Zweierpotenz. [der Fall $m = 0$ ist hier mit inbegriffen, denn dann ist $\frac{a}{b}$ eine ganze Zahl und $b = 1$ hat keine Primfaktoren].

(i)$\Leftarrow$(ii) Es sei b eine Zweierpotenz, etwa $b = 2^{4m-r} = 16^m \cdot 2^{-r}$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $0 \leq r \leq 3$. Ferner sei

$$2^r \cdot a = \sum_{k=0}^{n} c_k 16^k$$

eine 16-adische Darstellung der ganzen Zahl $2^r \cdot a$. Hieraus erhält man mit

$$\frac{a}{b} = \frac{2^r \cdot a}{2^r \cdot b} = \frac{2^r \cdot a}{16^m} = \sum_{k=0}^{n} c_k 16^{k-m}$$

die gewünschte 16-adische Darstellung von $\frac{a}{b}$ mit nur endlich vielen von 0 verschiedenen Nachkommastellen.

Aufgabe 8.

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & 2 \\ 3 & 10 & 1 & 7 \\ 4 & 8 & 1 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

4 Punkte (a) Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung von A.

3 Punkte (b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$.

Lösungsvorschlag:

(a) Wir wenden das Verfahren aus dem Kurs an. Hier ist vor der Pivotierung keine Permutation erforderlich. Die drei Pivotschritte liefern folgende Resultate:

$$\left|\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ \hline 4 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right|$$

Insgesamt erhält man die LU-Zerlegung $A = LU$ mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Mit der Zerlegung aus Teil (a) gilt:

$$Ax = b \Longleftrightarrow L(Ux) = b \Longleftrightarrow \exists y : (Ux = y \wedge Ly = b)$$

Man stellt zunächst das Gleichungssystem $Ly = b$ auf

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

und ermittelt (beginnend mit y_1) nacheinander die Komponenten der Lösung:

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 \\ y_2 &= 2 - 2y_1 = 0 \\ y_3 &= 5 - 3y_1 - 2y_2 = 2 \\ y_4 &= 6 - 4y_1 - y_3 = 0 \end{aligned}$$

Mit diesem Wert für y stellt man das Gleichungssystem $Ux = y$ auf

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und ermittelt (jetzt beginnend mit x_4) nacheinander die Komponenten der Lösung:

$$\begin{aligned} x_4 &= 0 \\ x_3 &= 2 - 4x_4 = 2 \\ x_2 &= 0 \\ x_1 &= 1 - 2x_2 - x_4 = 1 \end{aligned}$$

Insgesamt ist also $x = (1 \quad 0 \quad 2 \quad 0)^T$ die Lösung von $Ax = b$.

Aufgabe 9.

Es sei A eine reelle $m \times n$-Matrix.

2 Punkte (a) Zeigen Sie: $A^T A$ ist symmetrisch und positiv semidefinit.

4 Punkte (b) Zeigen Sie: $A^T A$ positiv definit $\iff \ker A = \{0\}$.

3 Punkte (c) Geben Sie ein Beispiel einer Matrix A an, für welche die LU-Zerlegung und die Cholesky-Zerlegung von $A^T A$ nicht übereinstimmen.

Lösungsvorschlag:

(a) Eine Matrix ist genau dann symmetrisch wenn sie mit ihrer Transponierten übereinstimmt. Hier ist

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$$

also ist $A^T A$ symmetrisch.

Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$v^T (A^T A) v = (v^T A^T)(Av) = (Av)^T (Av) = |Av|^2 \geq 0$$

also ist $A^T A$ positiv semidefinit.

(b) Aus Teil (a) ist bereits $v^T (A^T A) v = |Av|^2$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ bekannt. Daher gilt:

$$v^T (A^T A) v = 0 \iff |Av| = 0 \iff Av = 0$$

Dementsprechend ist $A^T A$ genau dann positiv definit wenn $Av \neq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt, also $\ker A = \{0\}$ ist.

(c) Ein Beispiel kleinster Dimension ist die 1×1-Matrix $A = (2)$ mit $(1)(4) = (4) = (2)(2)$. Generell Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen ungleich 0 oder 1 ein Gegenbeispiel liefern. Ein Beispiel mit einer nicht-diagonalen 2×2-Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10.

6 Punkte (a) Zu einer reellen symmetrischen $n \times n$-Matrix A, einem $b \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}$ sei die Abbildung $q \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$q(x) = x^T A x + b^T x + r$$

definiert. Zeigen Sie

(i) q ist konvex $\iff$ A ist positiv semidefinit.

(ii) q ist strikt konvex $\iff$ A ist positiv definit.

4 Punkte (b) Bestimmen Sie, ob die durch $f(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + x - 4y - z + 5$ definierte Funktion $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ konvex ist.

Lösungsvorschlag:

(a) Zunächst ist der Definitionsbereich $\mathbb{R}^3$ konvex. Demnach ist q genau dann konvex, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ und alle $0 \leq \lambda \leq 1$ die Ungleichung

$$q((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)q(x)+\lambda q(y)$$

erfüllt ist; q ist strikt konvex, wenn obige Ungleichung für $x \neq y$ und $0 < \lambda < 1$ strikt ist.

Wegen $(1-\lambda)r+\lambda r = r$ und der Linearität von $b^T(-)$ hängt die Gültigkeit der Ungleichung nur von A ab:

$$\begin{aligned}
(1-\lambda)q(x)+\lambda q(y) \; - \; q((1-\lambda)x+\lambda y)& \\
&= (1-\lambda)x^TAx+\lambda y^TAy \; - \; ((1-\lambda)x+\lambda y)^TA((1-\lambda)x+\lambda y) \\
&= (1-\lambda)x^TAx+\lambda y^TAy \; - \; (1-\lambda)^2x^TAx-\lambda^2y^TAy-2(1-\lambda)\lambda x^TAy \\
&= (1-\lambda)\lambda x^TAx+(1-\lambda)\lambda y^TAy-2(1-\lambda)\lambda x^TAy \\
&= (1-\lambda)\lambda(x^TAx+y^TAy-2x^TAy) \\
&= (1-\lambda)\lambda(x-y)^TA(x-y)
\end{aligned}$$

(i) Sei q konvex. Für $\lambda = \frac{1}{2}$ und $y = 0$ erhält man:

$$0 \leq \frac{1}{2}q(x)+\frac{1}{2}q(0)-q(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{4}x^TAx$$

Also ist A positiv semidefinit.

Sei umgekehrt A positiv semidefinit. Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ und $0 \leq \lambda \leq 1$ erhält man:

$$0 \leq (1-\lambda)\lambda(x-y)^TA(x-y) = (1-\lambda)q(x)+\lambda q(y)-q((1-\lambda)x+\lambda y)$$

Also ist q konvex.

(ii) Sei q strikt konvex. Für $\lambda = \frac{1}{2}$, $x \neq 0$ und $y = 0$ erhält man:

$$0 < \frac{1}{2}q(x)+\frac{1}{2}q(0)-q(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{4}x^TAx$$

Also ist A positiv definit.

Sei umgekehrt A positiv definit. Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ mit $x \neq y$ und $0 < \lambda < 1$ erhält man:

$$0 < (1-\lambda)\lambda(x-y)^TA(x-y) = (1-\lambda)q(x)+\lambda q(y)-q((1-\lambda)x+\lambda y)$$

Also ist q strikt konvex.

(b) Wiederum ist der Definitionsbereich $\mathbb{R}^3$ konvex und in der Darstellung

$$f(x,y,z) = (x \;\; y \;\; z)\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (1 \;\; -4 \;\; -1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 5$$

ist (nach Teil (a)) ersichtlich, dass f genau dann konvex ist wenn die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

positiv semidefinit ist. Zum Nachweis dieser Eigenschaft gibt es mehrere Möglichkeiten:

- $4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy = 3x^2 + (x+y)^2 + z^2$ ist als Summe von Quadraten immer nicht-negativ und verschwindet nur für $x = y = z = 0$.
- Das charakteristische Polynom von A ist $(x-1)(x^2-5x+3)$ und dessen Nullstellen (d.h. die Eigenwerte von A) sind alle positiv.
- Die Berechnung der Choleskyzerlegung $A = LL^T$ ergibt

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  mit positiven Diagonalelementen.

Also ist f (sogar strikt) konvex.

Aufgabe 11.

7 Punkte Bestimmen Sie die Extrempunkte der durch $f(x,y) = 3x+4y$ definierten Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf der Kreisscheibe $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$.

Lösungsvorschlag:

Zunächst stellen wir fest, dass es wegen $f(-x,-y) = -f(x,y)$ ausreicht, die Stellen zu bestimmen, an denen f auf der Kreisscheibe ein Minimum annimmt. Es gilt also das Minimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x,y) = 3x+4y \\ \text{unter} \quad & g(x,y) = x^2+y^2-1 \leq 0 \end{aligned}$$

zu lösen.

(1) Wir berechnen zuerst die Gradienten von f und g:

$$\nabla f(x,y) = (3,4) \qquad \text{und} \qquad \nabla g(x,y) = (2x,2y)$$

(2) Der Gradient von f verschwindet nirgends, also gibt es im Inneren der Kreisscheibe kein lokales Minimum.

(3) Auf dem Rand der Kreisscheibe verschwindet der Gradient von g nirgends, also sind dort alle Punkte regulär.

(4) Auf dem Rand der Kreisscheibe ist die Ungleichheitsbedingung g aktiv und die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingung hat die Form

$$\nabla f = \mu \nabla g$$

mit $\mu < 0$. Mit den Werten aus (1) erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} 3 &= 2\mu x \\ 4 &= 2\mu y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aus der aktivierten Ungleichheitsbedingung herrührt. Wenn man die ersten beiden Gleichungen nach x und y auflöst und in die letzte Gleichung einsetzt, erhält man

$$1 = \left(\frac{3}{2\mu}\right)^2 + \left(\frac{4}{2\mu}\right)^2 = \frac{25}{4\mu^2}$$

und daraus $\mu^2 = \frac{25}{4}$. Wegen $\mu < 0$ ist also $\mu = -\frac{5}{2}$, $x = -\frac{3}{5}$ und $y = -\frac{4}{5}$

(5) Abschließend testen wir mit dem Ergebnis aus (4) die Bedingung zweiter Ordnung. Die beteiligten Hessematritzen $\nabla^2 f$ und $\nabla^2 g$ sind konstant. Es ist

$$\nabla^2 f(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}) + \frac{5}{2}\nabla^2 g(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

und diese Matrix ist positiv definit. Damit ist die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung erfüllt.

Insgesamt hat f auf der Kreisscheibe bei $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ ein lokales Minimum -5 und bei $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ ein lokales Maximum 5. Diese lokalen Extrema sind auch global.

Aufgabe 12.

Sie betreiben eine Anlage, welche ein kohlensäurehaltiges Getränk in Dosen abfüllen kann, die entweder 330 ml oder 500 ml fassen. Diese Dosen verkaufen Sie in Gebinden zu je 10 Paletten á 32 Dosen. Die Abfüllanlage kann jede Woche für maximal 70 Stunden betrieben werden. In einer Stunde kann die Anlage jeweils ein Gebinde von 320 Dosen abfüllen, unabhängig vom Fassungsvermögen der befüllten Dosen. Jede Woche stehen Ihnen maximal 10000 Liter des kohlensäurehaltigen Getränks zur Abfüllung zur Verfügung. Die Verkaufsabteilung ist ausserdem in der Lage, maximal 60 Gebinde der 330 ml Dosen und 40 Gebinde der 500 ml Dosen je Woche zu verkaufen. Ihr Gewinn pro 330 ml-Gebinde beträgt 45 Euro, pro 500 ml-Gebinde 35 Euro.

6 Punkte (a) Modellieren Sie das Problem, den Wochengewinn zu maximieren, als lineares Optimierungsproblem.

3 Punkte (b) Wie sieht der optimale Produktionsplan aus? Welcher Gewinn kann maximal erwirtschaftet werden? Begründen Sie!

Lösungsvorschlag:

(a) Wir bezeichnen die Anzahl der Stunden, in denen die Maschine 330 ml Dosen befüllt mit x und die Anzahl der Stunden, in denen die Maschine 500 ml Dosen befüllt mit y. Der Gewinn soll maximiert werden, also ist das Optimierungsziel

$$\max \quad 45x + 35y.$$

Weiterhin sind die folgenden Nebenbedingungen einzuhalten: Die Produktionsdauer ist naturgemäß immer nichtnegativ, also muss

$$x, y \geq 0$$

gelten. Die Maschine kann maximal 70 Stunden betrieben werden, also ist weiterhin

$$x + y \leq 70.$$

Ein 330 ml-Gebinde benötigt $0,33 \cdot 320 = 105,6$ Liter des Getränks, während ein 500 ml-Gebinde $0,5 \cdot 320 = 160$ Liter benötigt. Die Kapazitätsbeschränkung des Abfüllerzeugnisses wird also durch

$$105,6 \cdot x + 160 \cdot y \leq 10000$$

beschrieben. Als letztes muss auch noch die Absatzbeschränkung am Markt modelliert werden: Es gelte

$$x \leq 60 \quad \text{und} \quad y \leq 40.$$

(b) Da ein 330 ml-Gebinde weniger Getränkeresourcen verbraucht aber bei gleicher Maschinenlaufzeit mehr Gewinn bringt, ist es klar, dass das Getränk am besten in möglichst viele 330 ml Dosen gefüllt werden muss. Wir können höchstens 60 dieser Gebinde absetzen, und für diese müssen wir $105,6 \cdot 60 = 6336$ Liter Getränk verwenden. Es bleiben also noch 3664 Liter übrig, mit denen 500 ml Dosen befüllt werden können. Dies entspricht $22,9$ Gebinden, von denen allerdings nur noch 10 produziert werden können, da sonst die maximale Maschinenlaufzeit überschritten wird. Die Optimallösung ist also $x = 60$ und $y = 10$ mit einem Gewinn von $45 \cdot 60 + 35 \cdot 10 = 3050$ Euro.