Lösungsskizzen zu den Klausuraufgaben zum Kurs 1142 Algorithmische Mathematik

1142KSL16

Aufgabe 1.

Die Folge $(F_n)_{n\geq 0}$ der Fibonaccizahlen ist definiert durch

$$\begin{aligned} F_0 &= 1, \\ F_1 &= 1, \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{für alle } n \geq 2. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach n. Für $n = 0$ gilt

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = \sum_{i=0}^{0} F_i = F_0 = 1 = 1 + 1 - 1 = F_0 + F_1 - 1 = F_2 - 1 = F_{0+2} - 1,$$

wobei wir im drittletzten Schritt die beiden Startwerte der Fibonaccifolge eingesetzt haben und im vorletzten Schritt die Rekursionsformel benutzt haben. Damit ist die Verankerung erbracht. Sei nun $n > 0$ und die Behauptung für $n-1$ bereits bewiesen, d.h. es gelte

$$\sum_{i=0}^{n-1} F_i = F_{(n-1)+2}. \tag{IV}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} F_i &= \sum_{i=0}^{n-1} F_i + F_n \\ &\overset{IV}{=} (F_{(n-1)+2} - 1) + F_n \\ &= (F_{n+1} + F_n) - 1 \\ &= F_{n+2} - 1, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Rekursionsformel für die Fibonaccizahlen angewandt haben und dies tun durften, da $n + 2 \geq 3 \geq 2$ gilt.

Aufgabe 2.

An der Universität Musterstadt können nach dem ersten Semester Prüfungen in den drei Fächern A, B und C abgelegt werden. 90% der Studierenden legen eine Prüfung in mindestens einem der Fächer A, B oder C ab. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jemand die Prüfung im Fach A ablegt, beträgt 50%, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jemand die Prüfung im Fach B ablegt, 70%, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jemand die Prüfungen

- sowohl in Fach A als auch in Fach B ablegt, 30%;
- sowohl in Fach A als auch in Fach C ablegt, 25%; bzw.
- sowohl in Fach B als auch in Fach C ablegt, 40%.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jemand die Prüfungen in allen drei Fächern ablegt, beträgt 15%.
Zeigen oder widerlegen Sie die Richtigkeit folgender Aussage:

> „Wenn jemand die Prüfung in Fach C ablegt, dann legt er auch die Prüfung in Fach A oder Fach B (oder beiden) ab.“

Lösungsvorschlag:
Wir zeigen die Richtigkeit der behaupteten Aussage.
Sei A (bzw. B bzw. C) das Ereignis, dass jemand seine Prüfung im Fach A (bzw. B bzw. C) ablegt.
Dann besagt die Aufgabenstellung unter anderem:

$$\begin{aligned} p(A) &= 50\% && (1)\\ p(B) &= 70\% && (2)\\ p(A\cap B) &= 30\% && (3)\\ p(A\cup B\cup C) &= 90\% && (4) \end{aligned}$$

Die übrigen Angaben der Aufgabenstellung sind irrelevant und werden, um Schreibarbeit zu sparen, gar nicht erst aufgeführt..
Damit folgen

$$p(A\setminus B) = p(A\setminus(A\cap B)) = p(A) - p(A\cap B) \overset{(1),(3)}{=} 50\% - 30\% = 20\% \tag{5}$$

und

$$p(A\cup B) = p(B\cup(A\setminus B)) = p(B) + p(A\setminus B) \overset{(2),(5)}{=} 70\% + 20\% = 90\%, \tag{6}$$

woraus

$$p(C\setminus(A\cup B)) = p((A\cup B\cup C)\setminus(A\cup B)) = p(A\cup B\cup C) - p(A\cup B) \overset{(4),(6)}{=} 90\% - 90\% = 0$$

folgt.
Da die Anzahl der Studierenden aus physikalischen Gründen eine endliche sein muss, bedeutet ebenjene Wahrscheinlichkeit, dass niemand eine Prüfung in Fach C ablegt, der nicht auch eine Prüfung in Fach A oder B ablegt, was zu zeigen war.

Aufgabe 3.
Betrachten Sie folgende Relation R auf der Grundmenge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, wobei $R \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$(x,y)\in R \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists z\in\mathbb{Z}:\ x-y=z.$$

Beweisen Sie: Die Relation R ist eine Äquivalenzrelation.

Lösungsvorschlag:
Wir weisen nach, dass die Relation R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Reflexivität: Sei $x \in \mathbb{R}$. Da $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$ ist, gilt $(x,x) \in R$.

Symmetrie: Seien $x,y \in \mathbb{R}$ und gelte $(x,y) \in R$, d.h. es gibt ein $z \in \mathbb{Z}$ mit $x - y = z$. Dann folgt $y - x = -z \in \mathbb{Z}$, somit gilt $(y,x) \in R$.

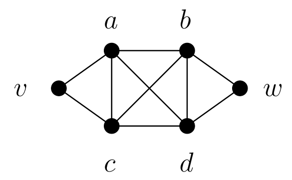
Transitivität: Seien $w,x,y \in \mathbb{R}$ und gelte $(w,x) \in R$ und $(x,y) \in R$, d.h. es gibt $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ mit $w - x = z_1$ und $x - y = z_2$. Dann folgt

$$w - y = w - x + x - y = \underbrace{z_1}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{z_2}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z},$$

somit gilt $(w,y) \in \mathbb{Z}$.

Also ist die Relation R eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 4.
Betrachten Sie den im folgenden abgebildeten Graphen $G = (V,E)$:



(a) Zeigen Sie: G ist 2-zusammenhängend.

Geben Sie eine Ohrenzerlegung von G an.

Lösungsvorschlag:

Ein mögliche Ohrenzerlegung (C, P_1, P_2, P_3, P_4) besteht aus dem Kreis C der Länge 6 der die Zeichnung berandenden Kanten und den Wegen P_i der Länge 1, die durch die restlichen vier Kanten gegeben sind.

Da der Graph G also eine Ohrenzerlegung hat, ist G 2-zusammenhängend.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie: G ist eulersch.

Geben Sie eine Eulertour an, falls eine solche existiert.

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen, dass G eulersch ist.

Dies sieht man zum Beispiel daran, dass G einerseits offensichtlich zusammenhängend ist und andererseits die Knoten v und w den Grad 2 haben und alle anderen Knoten den Grad 4, also alle Knotengrade gerade sind.

Wir konstruieren eine Eulertour mittels des Eulertouralgorithmus wie folgt. Im ersten Durchgang finden wir den Außenkreis

$$v - a - b - w - d - c - v.$$

Von a aus finden wir einen weiteren Kreis

$$a - c - b - d - a.$$

Zusammengesetzt ergibt sich die Eulertour

$$v - a - c - b - d - a - b - w - d - c - v.$$

(c) Bestimmen Sie die Anzahl der Spaziergänge der Länge 4 von v nach w.

Lösungsvorschlag:

1. Lösungsmöglichkeit:

Jeder Spaziergang der Länge 4 von v nach w muss als zweiten Knoten a oder c und als vierten Knoten b oder d haben. Der dritte Knoten muss dann einer der beiden Knoten aus $\{a,b,c,d\}$ sein, der nicht der zweite oder vierte ist. Somit gibt es nur $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten für solche Spaziergänge. Jede solche Möglichkeit ergibt tatsächlich auch einen Spaziergang, da $\{a,b,c,d\}$ einen vollständigen Graphen K_4 induzieren. Also gibt es genau 8 Spaziergänge der Länge 4 von v nach w.

2. Lösungsmöglichkeit:

Die Adjazenzmatrix von G bezüglich der Reihenfolge v,a,b,c,d,w lautet

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit folgen

$$A_G^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und weiter

$$\begin{aligned} A_G^4 &= A_G^2 A_G^2 \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 14 & 17 & 22 & 17 & 22 & 8 \\ 17 & 38 & 32 & 37 & 32 & 22 \\ 22 & 32 & 38 & 32 & 37 & 17 \\ 17 & 37 & 32 & 38 & 32 & 22 \\ 22 & 32 & 37 & 32 & 38 & 17 \\ 8 & 22 & 17 & 22 & 17 & 14 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir lesen in der rechten oberen Ecke von A_G^4 ab, dass die Anzahl der Spaziergänge der Länge 4 von v nach w genau 8 ist.

(d) Zeigen oder widerlegen Sie: G ist ein Baum.

Lösungsvorschlag:

Die Behauptung ist falsch.

Beweis: G ist kein Baum, da der Graph nicht kreisfrei ist, denn z.B. die Knotenmenge $\{v,a,c\}$ induziert einen Kreis.

(e) Zeigen oder widerlegen Sie: G ist bipartit.

Lösungsvorschlag:

Die Behauptung ist falsch.

Beweis: G ist nicht bipartit, da der Graph ungerade Kreise enthält, denn z.B. die Knotenmenge $\{v,a,c\}$ induziert einen ungeraden Kreis.

(f) Das *Komplement* von G ist der Graph $\overline{G} = (V, \overline{E})$ mit

$$\overline{E} = \binom{V}{2} \setminus E.$$

D.h. anschaulich ist $\overline{G}$ der Graph der Nichtkanten von G.

Zeigen oder widerlegen Sie: $\overline{G}$ ist ein Baum.

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen, dass $\overline{G}$ ein Baum ist.

1. Beweismöglichkeit:

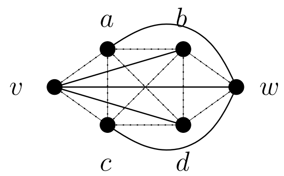
Der Graph G enthält 10 Kanten. Da der vollständige Graph K_6 genau 15 Kanten enthält, enthält $\overline{G}$ somit genau $15-10=5=6-1$ Kanten.

Außerdem ist $\overline{G}$ zusammenhängend, denn in ihm sind die Knoten b und d mit v verbunden, die Knoten a und c mit w, und v ist mit w verbunden.

Die beiden obigen Eigenschaften besagen nach Satz 4.1.5 e)$\Longrightarrow$a) zusammengenommen, dass G ein Baum ist.

2. Beweismöglichkeit:

Den Graphen $\overline{G}$ erhält man, indem man alle Knotenpaare verbindet, die bislang nicht verbunden waren und alle in G bestehenden Kanten löscht. Er sieht also wie folgt aus.



An der Zeichnung erkennt man, dass $\overline{G}$ offensichtlich kreisfrei und zusammenhängend, also ein Baum ist.

(g) Zeigen oder widerlegen Sie: $\overline{G}$ ist *selbstkomplementär* (d.h. $\overline{G}$ ist isomorph zu G).

Lösungsvorschlag:

Die Behauptung ist falsch.

1. Beweismöglichkeit:

Der Knoten a hat Grad 4 in G, also Grad 1 in $\overline{G}$. Wäre $\overline{G}$ selbstkomplementär, so müsste G auch einen Knoten vom Grad 1 haben. Dies ist jedoch nicht der Fall.

2. Beweismöglichkeit:

Nach E 2.3 (b) ist die Anzahl der Knoten in einem selbstkomplementären Graphen von der Form $4k$ oder $4k+1$. Die Anzahl der Knoten in $\overline{G}$ ist aber 6, was nicht von dieser Form ist. Also ist $\overline{G}$ nicht selbstkomplementär.

3. Beweismöglichkeit:

Nach dem Ergebnis aus (d) ist G kein Baum. Nach dem Ergebnis aus (f) ist aber $\overline{G}$ ein Baum. Somit kann G nicht isomorph zu $\overline{G}$ sein.

(h) Betrachten Sie nun wieder den Originalgraphen G zusammen mit der Kantengewichtsfunktion c, welcher jeder Kante $\{x,y\}$ das Gewicht

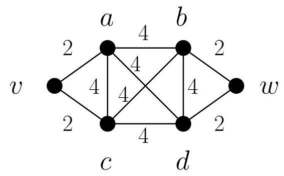
$$c(\{x,y\}) = \min\{\deg_G(x), \deg_G(y)\}$$

zuordnet.

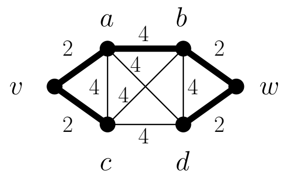
Zeigen Sie: Jeder minimale aufspannende Baum von G bezüglich der Kantengewichtsfunktion c ist isomorph zum Weg P_6 auf 6 Knoten.

Lösungsvorschlag:

Der Graph G mit Kantengewichten gemäß c sieht wie folgt aus.



Mit dem Algorithmus von Kruskal findet man einen minimalen aufspannenden Baum, etwa den Folgenden (fett in G eingezeichnet).



Dieser hat das Gewicht

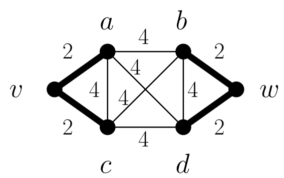
$$2+2+2+2+4=12.$$

Somit hat auch jeder weitere minimale aufspannende Baum das Gewicht 12.

Jeder aufspannende Baum von G hat genau 5 Kanten. Jeder minimale aufspannende Baum muss daher die Kanten der vier kleinsten Gewichte, also vom Gewicht 2, enthalten, denn ein aufspannender Baum T, bei dem dies nicht der Fall ist, hat mindestens das Gewicht

$$c(T)=4+4+c(e_1)+c(e_2)+c(e_3)\geq 4+4+2+2+2=14.$$

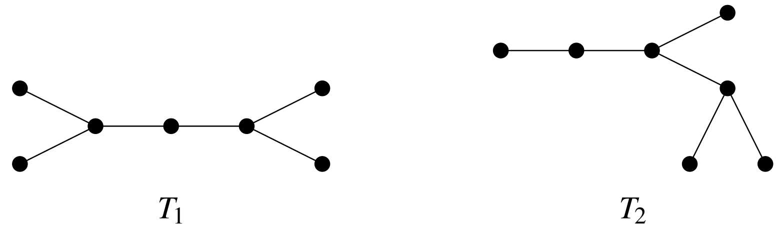
Ein minimaler aufspannender Baum enthält also neben den Kanten vom Gewicht 2 genau eine Kante vom Gewicht 4. Dies kann keine der Kanten $\{a,c\}$ oder $\{b,d\}$ sein, da diese jeweils einen Kreis mit Kanten vom Gewicht 2 schließen.



Jede der übrigen vier Kanten vom Gewicht 4 verbindet die beiden Komponenten C_1 und C_2 des durch die Kanten vom Gewicht 2 kanteninduzierten Graphen H, ist also ein aufspannender Baum, der nach dem oben Gesagten minimal ist. Die Komponenten von H sind jeweils isomorph zum P_3. Da eine solche Kante vom Gewicht 4 jeweils ein Blatt von C_1 mit einem Blatt von C_2 verbindet, ist der entstehende aufspannende Baum jeweils isomorph zum P_6, was zu zeigen war.

Aufgabe 5.

Betrachten Sie die unten abgebildeten Graphen T_1 und T_2.



Zeigen oder widerlegen Sie: T_1 und T_2 sind isomorph.

Lösungsvorschlag:

Die Behauptung ist falsch.

Wir zeigen, dass T_1 und T_2 nicht isomorph sind.

1. Beweismöglichkeit:

Das Zentrum von T_1 bzw. T_2 ist jeweils einelementig. Der Zentrumsknoten von T_1 hat Grad 2, der von T_2 dagegen Grad 3. Da jeder Isomorphismus von Graphen das Zentrum auf das Zentrum abbildet, können T_1 und T_2 somit nicht isomorph sein.

2. Beweismöglichkeit:

In T_2 gibt es ein Blatt, welches zu einem Knoten vom Grad 2 benachbart ist, in T_1 gibt es kein solches Blatt. Somit sind T_1 und T_2 nicht isomorph.

3. Beweismöglichkeit:

T_1 und T_2 haben jeweils genau zwei Knoten vom Grad 3. Diese sind in T_2 benachbart, in T_1 jedoch nicht. Somit sind T_1 und T_2 nicht isomorph.

4. Beweismöglichkeit:

T_1 und T_2 sind offensichtlich Bäume. Der Code von T_1 ist

$$((()())(()())).$$

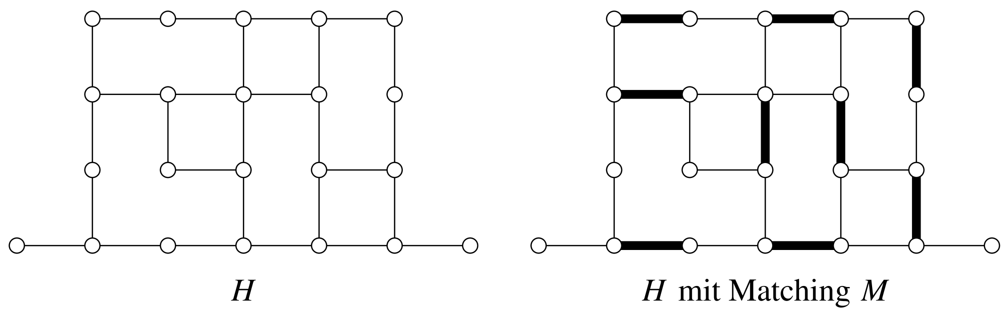
Der Code von T_2 lautet dagegen

$$((()())(())()).$$

Da die Codes verschieden sind (z.B. unterscheiden sie sich an der elften Stelle), sind die Bäume T_1 und T_2 nicht isomorph.

Aufgabe 6.

Betrachten Sie den unten abgebildeten Graphen H und das eingezeichnete Matching M (fette Kanten).

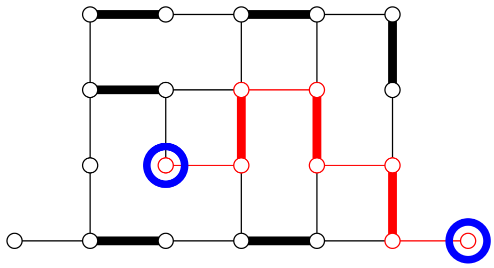


(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Das eingezeichnete Matching M ist maximal.

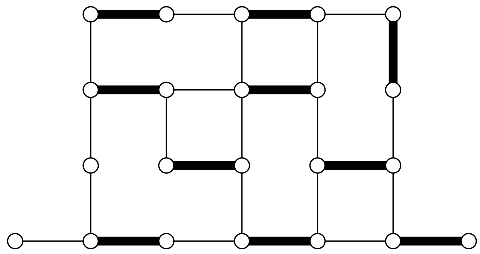
Lösungsvorschlag:

Die Behauptung ist falsch.

Beweis: Ein augmentierender Weg ist in der Zeichnung unten links rot eingezeichnet. Nach Augmentation erhält man das Matching M' unten rechts, welches eine Kante mehr als M enthält. Somit ist M nicht maximal.



H mit M und augmentierendem Weg



H mit größerem Matching M'

(b) Zeigen oder widerlegen Sie: Der Graph H hat ein perfektes Matching.

Lösungsvorschlag:

Die Behauptung ist falsch.

Beweis: Die eine Bipartition enthält zwei Knoten mehr als die andere, wie man leicht an der Zeichnung von H mit dem eingezeichneten größeren Matching M' sieht. Daher gibt es kein perfektes Matching für den Graphen H.

Anmerkung: Aus (b) und der Tatsache, dass es bezüglich des Matchings M' aus (a) nur zwei ungematchte Knoten gibt, folgt sofort, dass M' ein maximales Matching ist.

Aufgabe 7.

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine Zahl mit $\frac{1}{2} < x < 1$, die in 4-adischer Darstellung $x = 0.x_{-1}x_{-2}x_{-4}\dots$ nur endlich viele von Null verschiedene Nachkommastellen x_{-i} hat. Sei K der kleinste Index, so dass für alle $i > K$ gilt: $x_{-i} = 0$.

Zeigen Sie: Die Binärdarstellung (2-adische Darstellung) von $x = y_{-1}y_{-2}y_{-3}\dots$ hat dann auch nur endlich viele von Null verschiedene Nachkommastellen und für den kleinsten Index L, so dass $y_{-i} = 0$ für alle $i > L$ gilt, gilt:

$$L = 2K \quad \text{oder} \quad L = 2K - 1.$$

Lösungsvorschlag:

Da sich jede Zahl $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ in der Form

$$a = 2b + c \tag{7}$$

mit $b,c \in \{0,1\}$ darstellen lässt, gilt

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{K} x_{-i} 4^{-i} \\ &\overset{(7)}{=} \sum_{i=1}^{K} \underbrace{(2y_{-(2i-1)} + y_{-2i})}_{=x_{-i}} 4^{-i} \\ &= \sum_{i=1}^{K} (y_{-(2i-1)} 2^{-(2i-1)} + y_{-2i} 2^{-2i}) \\ &= \sum_{i=1}^{2K} y_{-i} 2^{-i} \\ &= 2^0 \cdot \sum_{i=1}^{2K} y_{-i} 2^{-i}, \end{aligned}$$

wobei letzteres offenbar die 2-adische Darstellung von x ist (wegen $1 > x > \frac{1}{2}$ ist auch $y_{-1} = 1 \neq 0$, so dass der Exponent 0 richtig ist). Somit ist diese Darstellung auch endlich und es gilt

$$L \leq 2K. \tag{8}$$

Wegen der Minimalität von K gilt

$$0 \neq x_{-K} = 2y_{-(2k-1)} + y_{-2K}. \tag{9}$$

Da $y_{-(2K-1)}, y_{-2K} \geq 0$, folgt aus (9), dass $y_{-(2k-1)} \neq 0$ oder $y_{-2K} \neq 0$ gilt. Somit ist

$$L \geq 2K - 1. \tag{10}$$

Da $L \in \mathbb{N}$, besagen (8) und (10) zusammen, dass $L \in \{2K-1, 2K\}$, was zu zeigen war.

Aufgabe 8.
Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(a) Berechnen Sie $\|A\|_\infty$.

Lösungsvorschlag:

$$\|A\|_\infty = \max\{1+1+1, |-1|+3+|-1|, 1+0+3\} = \max\{3,5,4\} = 5.$$

(b) Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung von A.

Lösungsvorschlag:

Wir bestimmen die LU-Zerlegung wie im Kurstext mittels Gauss-Elimination:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{r|rr} 1 & 1 & 1 \\ \hline -1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ \hline -1 & 4 & 0 \\ \cline{2-2} 1 & -\frac{1}{4} & 2 \end{array}\right)$$

Eine solche LU-Zerlegung lautet also

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{U}.$$

(c) Bestimmen Sie, sofern möglich, eine Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ des Gleichungsystems $Ax = b$ oder beweisen Sie dessen Nichtlösbarkeit.

Lösungsvorschlag:

Wir lösen zunächst $Ly = b$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Wir lesen ab

$$\begin{aligned} y_1 &= 3 \\ y_2 &= 1 + y_1 = 1 + 3 = 4 \\ y_3 &= 0 + \frac{1}{4} y_2 - y_1 = 0 + 1 - 3 = -2 \end{aligned}$$

Nun lösen wir $Ux = y$, was uns dann eine Lösung x des Gleichungssystems $Ax = b$ ergibt:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Wir lesen ab

$$\begin{aligned} x_3 &= -1 \\ x_2 &= 1 \\ x_1 &= 3 - x_2 - x_3 = 3 - 1 + 1 = 3 \end{aligned}$$

Die eindeutige Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ lautet also

$$x = (3, 1, -1)^\top.$$

Aufgabe 9.
Bestimmen Sie sämtliche lokalen Minima der Funktion $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

auf der Mannigfaltigkeit

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 1\}.$$

Lösungsvorschlag:
1. Lösungsmöglichkeit: Substitution
Für alle $(x,y,z) \in M$ gilt $x \neq 0$ und $y \neq 0$ und $z \neq 0$. Wir können also substituieren

$$z = \frac{1}{xy}$$

unter der Zusatzforderung

$$xy \neq 0.$$

Somit ist unser Problem äquivalent dazu, sämtliche lokalen Minima der Funktion

$$F : \ (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

mit

$$F(x,y) = f\left(x, y, \frac{1}{xy}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$$

zu bestimmen.
Da die Menge $U := (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ offen ist, können wir die gleichen Kriterien wie für die unrestringierte Optimierung im $\mathbb{R}^2$ dafür hinzuziehen.
Wir berechnen also zunächst den Gradienten und die Hessematrix von F.

$$\begin{aligned} \nabla F(x,y) &= \left(-\frac{1}{x^2} + y, -\frac{1}{y^2} + x\right) \\ \nabla^2 F(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{2}{y^3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für die Existenz eines lokalen Minimums an der Stelle $(x,y) \in U$ ist $\nabla F(x,y) = 0$, d.h.

$$y = \frac{1}{x^2} \tag{11}$$

$$x = \frac{1}{y^2} \tag{12}$$

Setzen wir (11) in (12) ein, so erhalten wir

$$x = x^4. \tag{13}$$

Setzen wir umgekehrt (12) in (11) ein, erhalten wir

$$y = y^4. \tag{14}$$

Da $x \neq 0 \neq y$ gilt, können wir in (13) und (14) kürzen und erhalten

$$1 = x^3, \qquad 1 = y^3,$$

was uns (über den reellen Zahlen) die eindeutige Lösung $(x,y) = (1,1)$ liefert.
Wir prüfen nun, ob die Bedingung zweiter Ordnung für diesen Kandidaten erfüllt ist, d.h., ob die Hessematrix an der Stelle $(1,1)$ positiv definit ist.
Für $(s,t) \neq (0,0)$ ist

$$(s,t)\nabla^2 F(1,1)(s,t)^\top = (s,t)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = 2s^2 + 2st + 2t^2 = s^2 + (s+t)^2 + t^2 > 0,$$

also ist $\nabla^2 F(1,1)$ positiv semidefinit.
Damit liegt bei $(x,y) = (1,1)$ tatsächlich ein striktes lokales Minimum.
Nach Rücksubstitution erhalten wir, das das einzige lokale Minimum der Funktion f auf der Mannigfaltigkeit M bei $(x,y,z) = (1,1,1)$ liegt.
2. Lösungsmöglichkeit: Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen
Wir definieren $h(x,y,z) = xyz - 1$ und berechnen die Gradienten von f und h:

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) &= \left(-\frac{1}{x^2}, -\frac{1}{y^2}, -\frac{1}{z^2}\right) \\ \nabla h(x,y,z) &= (yz, xz, xy). \end{aligned}$$

$\nabla h(x,y,z)$ ist linear unabhängig, außer wenn mindestens zwei der Variablen x,y,z Null sind. Letzterer Fall tritt aber hier nicht auf, da dann $0 = xyz \neq 1$, also $(x,y,z)^\top$ nicht zulässig ist. Somit gilt nach Satz 6.4.1: Notwendige Bedingungen dafür, dass an der Stelle $(x,y,z)^\top$ ein Minimum vorliegt, ist, dass es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$xyz = 1 \tag{15}$$

$$-\frac{1}{x^2} = \lambda yz \tag{16}$$

$$-\frac{1}{y^2} = \lambda xz \tag{17}$$

$$-\frac{1}{z^2} = \lambda xy \tag{18}$$

Aus (15) folgen $x,y,z \neq 0$ und $x = \frac{1}{yz}$. Setzen wir dies in (16), (17) und (18) ein, so erhalten wir $-\frac{1}{x^2} = \lambda\frac{1}{x}$ bzw. $-\frac{1}{y^2} = \lambda\frac{1}{y}$ bzw. $-\frac{1}{z^2} = \lambda\frac{1}{z}$. Es kann nicht $\lambda = 0$ gelten. Also

$$x = y = z = -\frac{1}{\lambda}.$$

Wegen (15) gilt somit $x^3 = 1$, also $x = 1$, $y = z = 1$ und $\lambda = -1$. Einziger Kandidat für ein Minimum ist also $(x,y,z)^\top = (1,1,1)^\top$.

Wir wollen mittels der hinreichenden Bedingung zeigen, dass dies tatsächlich ein Minimum ist. Wir berechnen zunächst

$$\nabla^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{y^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{z^3} \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 h(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

Der zu betrachtende Tangentialraum ist

$$\begin{aligned} T &= \mathrm{Kern}(\nabla h(1,1,1)) = \left\{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 | (1,1,1)(x,y,z)^\top = 0\right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ -\alpha \\ -\beta \end{pmatrix} | \alpha,\beta \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Für $(x,y,z)^\top \in T \setminus \{(0,0,0)^\top\}$ gilt

$$\begin{aligned} & (x,y,z)[\nabla^2 f(1,1,1) - \lambda \nabla^2 h(1,1,1)] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ = \; & (\alpha+\beta,-\alpha,-\beta) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ -\alpha \\ -\beta \end{pmatrix} \\ = \; & (\alpha+\beta,-\alpha,-\beta) \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ -\alpha \\ -\beta \end{pmatrix} \\ = \; & (\alpha+\beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2 > 0, \end{aligned}$$

d.h. die Matrix $\nabla^2 f(1,1,1) - (-1)\nabla^2 h(1,1,1)$ ist positiv definit auf dem Tangentialraum T an der Stelle $(1,1,1)^\top$. Somit ist an dieser Stelle wirklich ein Minimum der Funktion mit Zielfunktionswert 3.
Bemerkung: $\nabla^2 f(1,1,1) - (-1)\nabla^2 h(1,1,1)$ ist sogar auf ganz $\mathbb{R}^3$ positiv definit.

Aufgabe 10.
Bestimmen Sie die Konvergenzrate der Folge $\left(2^{-2^n+1000}\right)_{n\geq 0}$.
Lösungsvorschlag:
Der Grenzwert der Folge bei $n \longrightarrow \infty$ ist offensichtlich 0.
Sei $a_n := 2^{-2^n+1000}$

Wir betrachten für $p > 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{|a_{n+1} - 0|}{|a_n - 0|^p} &= \frac{2^{-2^{n+1}+1000}}{(2^{-2^n+1000})^p} \\
&= \frac{2^{-2\cdot 2^n+1000}}{2^{-2^n p+1000p}} \\
&= 2^{(-2\cdot 2^n+1000-(-2^n p+1000p))} \\
&= 2^{-2\cdot 2^n+p\cdot 2^n+1000-1000p} \\
&= 2^{2^n(p-2)+1000(1-p)} \\
&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \infty & \text{falls } p > 2 \\ 2^{-1000} & \text{falls } p = 2 \\ 0 & \text{falls } p < 2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Somit ist die Konvergenzrate der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ gleich 2.

Aufgabe 11.
Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y,z) = 4x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy - 2xz + z - x.$$

(a) Sei $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die Hessematrix $\nabla^2 f(x,y,z)$ von f an der Stelle (x,y,z).

Lösungsvorschlag:

Wir berechnen wir zunächst den Gradienten und dann die Hessematrix von f.

$$
\begin{aligned}
\nabla f(x,y,z) &= (8x - 4y - 2z - 1, -4x + 4y, -2x + 2z + 1) \\
\nabla^2 f(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 8 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(b) Zeigen Sie: f ist strikt konvex.

Lösungsvorschlag:

Da die Funktion zweimal stetig differenzierbar ist, genügt es zu zeigen, dass die Hessematrix, die wir in (a) bereits berechnet haben, an allen Stellen positiv definit ist.

Zu Untersuchung, ob die Hessematrix positiv definit ist, haben wir zwei Möglichkeiten:

1. Möglichkeit: Cholesky-Faktorisierung

Wir untersuchen, ob eine Cholesky-Faktorisierung der Hessematrix existiert. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned}
\ell_{1,1} &= 2\sqrt{2}, \\
\ell_{2,1} &= -\sqrt{2}, \\
\ell_{3,1} &= -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \\
\ell_{2,2} &= \sqrt{4-2} = \sqrt{2}, \\
\ell_{3,2} &= \frac{0-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \\
\ell_{3,3} &= \sqrt{2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = 1.
\end{aligned}$$

Somit existiert die Cholesky-Faktorisierung der Hessematrix, sie lautet

$$\nabla^2 f(x,y,z) = LL^\top$$

mit

$$L = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist die Hessematrix positiv definit und f somit strikt konvex.

2. Möglichkeit: Mittels der Definiton der positiven Definitheit

Seien $r,s,t \in \mathbb{R}$ mit $(r,s,t) \neq (0,0,0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(r,s,t)\nabla^2 f(x,y,z)(r,s,t)^\top &= (r,s,t)\begin{pmatrix} 8 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \\
&= 8r^2 - 8rs - 4rt + 4s^2 + 2t^2 \\
&= 2(r-t)^2 + 4(r-s)^2 + 2r^2 \\
&> 0,
\end{aligned}$$

also ist $\nabla^2 f(x,y,z)$ positiv definit.

Somit ist f strikt konvex.

(c) Führen Sie einen Schritt des Newtonverfahrens zur Bestimmung eines lokalen Minimums der Funktion f durch, der Startpunkt sei $(x_0,y_0,z_0)^\top = (1,1,1)^\top$.

Lösungsvorschlag:

Wir haben in (a) bereits den Gradienten in allgemeiner Form und die Hessematrix berechnet. Der Gradient an der Stelle $(1,1,1)$ lautet demnach

$$\nabla f(1,1,1) \quad = \quad (1,0,1),$$

Um die Inverse von $\nabla^2 f(1,1,1)$ zu berechnen, machen wir folgende Schritte.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 8 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -4 & 6 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

Somit lautet die Inverse

$$(\nabla^2 f(1,1,0))^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Die erste Iteration des Newtonverfahrens berechnet also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(d) Liegt an der Stelle des gefundenen ersten Iterationspunkts nach Durchführung des Schrittes des Newtonverfahrens ein striktes globales Minimum der Funktion f?

Lösungsvorschlag:

Da $\nabla f\left(0,0,-\frac{1}{2}\right) = (0,0,0)$ ist, handelt sich bei (x_1,y_1,z_1) um einen stationären Punkt.

Da f nach (a) strikt konvex ist, also insbesondere die Hessematrix $\nabla^2 f(x,y,z)$ regulär ist, hat das Gleichungssystem $\nabla f(x,y,z) = (0,0,0)$, welches ja äquivalent zu

$$\frac{1}{2}\nabla^2 f(x,y,z)(x,y,z)^\top = (1,0,-1)$$

ist, eine eindeutige Lösung, daher ist (x_1,y_1,z_1) der einzige stationäre Punkt von f.

Da f nach (a) strikt konvex ist, also $\nabla^2 f(x_1,y_1,z_1)$ positiv definit ist, handelt es sich dabei um ein striktes lokales Minimum.

Da die Stelle (x_1,y_1,z_1) eine lokale Minimalstelle ist und f stetig differenzierbar und nach nach (a) unter anderem konvex ist, gilt nach Aufgabe 7.1.7 b) für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) \geq f(x_1,y_1,z_1) + \underbrace{\nabla f(x_1,y_1,z_1)}_{=(0,0,0)}((x,y,z)^\top - (x_1,y_1,z_1)^\top) = f(x_1,y_1,z_1).$$

(Anschaulich bedeutet Aufgabe 7.1.7 b), dass der Tangentialraum am Punkt $(x_1, y_1, z_1, f(x_1, y_1, z_1))$ der durch den Funktionsgraphen von f im $\mathbb{R}^4$ beschriebenen Mannigfaltigkeit immer unterhalb dieser Mannigfaltigkeit liegt.) D.h. das Minimum ist sogar global.

Somit handelt es sich bei (x_1, y_1, z_1) um die Stelle des strikten globale Minimums der Funktion f.

Aufgabe 12.
In einer Chemiefabrik wird ein Produkt P aus den Rohstoffen X, Y und Z hergestellt. Dazu stehen zwei verschiedene Anlagen A und B zur Verfügung. Unten aufgelistet ist, wieviel von den Rohstoffen (in Tonnen), die Anlagen jeweils zur Herstellung von 1 Tonne des Produkts benötigen, sowie die maximal täglich nutzbare Menge an den Rohstoffen (in Tonnen):

Rohstoff	Anlage A	Anlage B	maximal nutzbare Menge
X	2	1	8
Y	2	3	12
Z	1	1	6

Die Betriebskosten von Anlage A zur Herstellung von einer Tonne von P betragen 15000€, die von Anlage B nur 10000€. Der Verkaufserlös von einer Tonne von P beträgt 30000€ (Sie dürfen davon ausgehen, dass die komplette Produktion Absatz findet.)

(a) Modellieren Sie das Problem, einen täglichen Produktionsplan zu erstellen, der den Gewinn maximiert, als lineares Programm.

Lösungsvorschlag:

Wir benutzen folgende Variablen:

$a :=$ Herstellungsmenge von Produkt P in Anlage A (in Tonnen)

$b :=$ Herstellungsmenge von Produkt P in Anlage B (in Tonnen)

Der Gewinn durch eine in Anlage A herstellte Tonne von P ist dann

$$30000€ - 15000€ = 15000€.$$

Der Gewinn durch eine in Anlage B herstellte Tonne von P ist

$$30000€ - 10000€ = 20000€.$$

Der tägliche Gewinn soll maximiert werden, d.h.

$$\max 15000a + 20000b \tag{19}$$

Die Rohstoffmengenbeschränkung für Rohstoff X besagt:

$$2a + b \leq 8 \tag{20}$$

Die Rohstoffmengenbeschränkung für Rohstoff Y besagt:

$$2a+3b \leq 12 \tag{21}$$

Die Rohstoffmengenbeschränkung für Rohstoff Z besagt:

$$a+b \leq 6 \tag{22}$$

Ferner besagt die Nichtexistenz negativer Masse:

$$a,b \geq 0 \tag{23}$$

Zusammengenommen bilden die Variablendefinition von a und b und (19), (20), (21), (22) und (23) ein mathematisches Modell des Problems in Form eines linearen Programms.

(b) Lösen Sie dieses mit einer Methode Ihrer Wahl.

Lösungsvorschlag:

1. Lösungsmöglichkeit: Simplexalgorithmus

Das Starttableau für den Simplexalgorithmus lautet:

$$\begin{array}{rrrrr|r} 15000 & 20000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}$$

Nach dem ersten Pivotschritt erhalten wir das Tableau:

$$\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 12500 & -7500 & 0 & 0 & -60000 \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{2} & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Nach dem ersten Pivotschritt erhalten wir das Tableau:

$$\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 0 & -1250 & -6250 & 0 & -85000 \\ \hline 1 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & 1 \end{array}$$

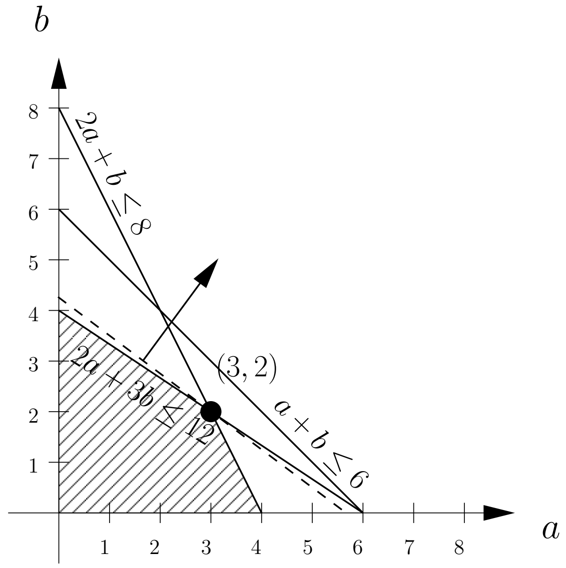
Das Tableau ist optimal. Wir lesen die Optimallösung $(a,b) = (3,2)$ als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcr} 2a & + & b & = & 8 \\ 2a & + & 3b & = & 12 \end{array}$$

ab. Der optimale Zielfunktionswert beträgt 85000.

Optimal ist es also, in der Anlage A pro Tag 3 Tonnen und in der Anlage B pro Tag 2 Tonnen von P zu produzieren. Damit wird ein Gewinn von 85000€ erwirtschaftet.

2. Lösungsmöglichkeit: Grafisch



Wir lesen die Optimallösung $(a,b) = (3,2)$ ab und errechnen den optimalen Zielfunktionswert als

$$15000 \cdot 3 + 20000 \cdot 2 = 85000.$$

Optimal ist es also, in der Anlage A pro Tag 3 Tonnen und in der Anlage B pro Tag 2 Tonnen von P zu produzieren. Damit wird ein Gewinn von 85000€ erwirtschaftet.