

Aufgabe 1.

6 Punkte Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^n (k!)^2 \leq ((n+1)!)^2 - n.$$

Lösungsvorschlag:

Für $n = 0$ und $n = 1$ gilt die Behauptung, da

$$\sum_{k=0}^0 (k!)^2 = (0!)^2 = 1 \leq 1 = 1 - 0 = ((0+1)!)^2 - 0$$

bzw.

$$\sum_{k=0}^1 (k!)^2 = (0!)^2 + (1!)^2 = 1 + 1 = 2 \leq 3 = 4 - 1 = ((1+1)!)^2 - 1.$$

Sei nun $n \geq 2$ und die Behauptung für $n - 1$ bereits bewiesen. Dann folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (k!)^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} (k!)^2 + (n!)^2 \\ &\stackrel{IV}{\leq} (n!)^2 - n + \underbrace{1}_{\leq (n!)^2} + (n!)^2 \\ &\leq \underbrace{3}_{\leq n+1} (n!)^2 - n \\ &\leq \underbrace{(n+1)}_{\leq (n+1)^2} (n!)^2 - n \\ &\leq (n+1)^2 (n!)^2 - n \\ &= ((n+1)!)^2 - n. \end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Behauptung also für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2.

6 Punkte Seien $n, k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für die Anzahl $|M|$ der Elemente der Menge

$$M := \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq n\}$$

gilt:

$$|M| = \binom{n+k}{k}.$$

Lösungsvorschlag:

1. Lösungsmöglichkeit: Kombinatorisch

Wir definieren $x_0 := n - (x_1 + x_2 + \dots + x_k)$ als den Schlupf der Ungleichung. Es gilt damit also

$$x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_k = n.$$

Wir stellen uns die Zahlen x_i ($0 \leq i \leq k$) in unärer Notation vor, d.h. die Zahl x_i schreiben wir als Folge von x_i Einsen. Dabei wird 0 als die leere Folge geschrieben. Ein Element aus M kann dann als eine Folge von n Einsen und k Pluszeichen gesehen werden. Je zwei verschiedene solcher Folgen führen auch zu verschiedenen k -Tupeln. Die Anzahl der Möglichkeiten, k Pluszeichen auf insgesamt $n+k$ Plätze zu verteilen, beträgt $\binom{n+k}{k}$. Dies ist die gesuchte Anzahl $|M|$.

2. Lösungsmöglichkeit: Vollständige Induktion

Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach n . Für $n=0$ ist die Behauptung richtig, denn das einzige Element von M ist dann $(0,0,\dots,0)$ und $\binom{0+k}{k} = 1$.

Sei nun $n \geq 1$ und die Behauptung bereits gezeigt für $n-1$. Wir machen Induktion nach k . Für $k=0$ enthält M nur das leere Tupel $()$ als einziges Element und $\binom{n+0}{0} = 1$, damit ist die Behauptung für $k=0$ richtig.

Sei nun $k \geq 1$ und die Behauptung für $k-1$ bereits gezeigt. Wir betrachten nun die Elemente $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in M$ und teilen diese in zwei Klassen ein. Erstens betrachten wir solche Tupel, für die gilt

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n.$$

Äquivalent dazu können wir Tupel mit

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} \leq n$$

betrachten, da x_n sich dann ja als der Schlupf der Ungleichung errechnet. Die Anzahl solcher Tupel beträgt nach der Induktionsvoraussetzung für k genau

$$a_1 = \binom{n+(k-1)}{k-1}.$$

Zweiten betrachten wir alle anderen Tupel, also solche für die gilt

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq n-1.$$

Nach Induktionsvoraussetzung für n beträgt die Anzahl solcher Tupel genau

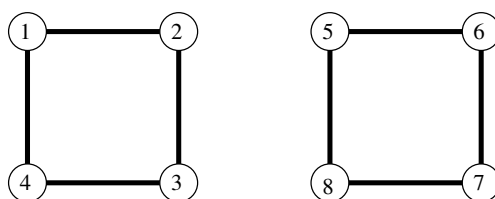
$$a_2 = \binom{(n-1)+k}{k}.$$

Insgesamt ergibt sich nach der Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten

$$|M| = a_1 + a_2 = \binom{n+k-1}{k-1} + \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k}{k}.$$

Aufgabe 3.

Betrachten Sie den unten abgebildeten Graphen $G = (V, E)$ mit 8 Knoten.



G

1 Punkt (a) Zeigen Sie oder widerlegen Sie: G ist eulersch.

Lösungsvorschlag:

G ist nicht eulersch, da G nicht zusammenhängend ist.

1 Punkt (b) Zeigen oder widerlegen Sie: G ist 2-zusammenhängend.

Lösungsvorschlag:

1. Lösungsmöglichkeit:

G ist nicht 2-zusammenhängend, da G nicht zusammenhängend ist.

2. Lösungsmöglichkeit:

G ist nicht 2-zusammenhängend, da G beim Entfernen von Knoten 1 aus zwei Komponenten besteht, nämlich denen auf der Knotenmenge $\{2, 3, 4\}$ bzw. $\{5, 6, 7, 8\}$.

3. Lösungsmöglichkeit:

G ist nicht 2-zusammenhängend, da die Knoten 1 und 5 nicht auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

1 Punkt (c) Zeigen oder widerlegen Sie: G ist bipartit.

Lösungsvorschlag:

1. Lösungsmöglichkeit:

Wir zeigen, dass G bipartit ist. Zum Beweis geben wir eine 2-Färbung von G an: die eine Farbklasse sei die Knotenmenge $\{1, 3, 5, 7\}$, die andere die Menge $\{2, 4, 6, 8\}$. Offensichtlich sind dann keine zwei Knoten gleicher Farbe benachbart. Also ist G bipartit.

2. Lösungsmöglichkeit:

G ist bipartit, da G keine Kreise ungerader Länge enthält.

3 Punkte (d) Bestimmen Sie die Anzahl der Spaziergänge der Länge 8 von Knoten 1 nach Knoten 2. Begründen Sie Ihr Ergebnis.

Lösungsvorschlag:

1. Lösungsmöglichkeit:

Da G nach (c) bipartit ist, gibt es keine Wege gerader Länge zwischen zwei Knoten verschiedener Farbklassen, insbesondere also auch nicht zwischen den Knoten 1 und 2. Die gesuchte Anzahl beträgt also 0.

2. Lösungsmöglichkeit:

Offensichtlich genügt es, die linke Komponente zu betrachten. Deren Adjazenzmatrix lautet

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

desweiteren

$$A^4 = A^2A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 8 \\ 8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

und

$$A^8 = A^4A^4 = \begin{pmatrix} 128 & 0 & 128 & 0 \\ 0 & 128 & 0 & 128 \\ 128 & 0 & 128 & 0 \\ 0 & 128 & 0 & 128 \end{pmatrix}.$$

Wir lesen die Anzahl der Spaziergänge der Länge 8 von Knoten 1 nach Knoten 2 als Eintrag in der ersten Zeile und zweiten Spalte von A^8 ab, also als 0, d.h. es gibt keinen solchen Spaziergang.

- 2 Punkte (e) Nun sei auf $G + \{3, 8\}$ die Kantengewichtsfunktion $w : E \cup \{\{3, 8\}\} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$w(\{i, j\}) := |i - j|$$

für alle Kanten $\{i, j\} \in E \cup \{\{3, 8\}\}$.

Bestimmen Sie einen minimalen aufspannenden Baum von $G + \{3, 8\}$ bezüglich der Gewichtsfunktion w . Begründen Sie Ihr Ergebnis.

Lösungsvorschlag:

Wir sortieren die Kanten aufsteigend nach Gewichten

$$\underbrace{\{1, 2\}}_1, \underbrace{\{2, 3\}}_1, \underbrace{\{3, 4\}}_1, \underbrace{\{5, 6\}}_1, \underbrace{\{6, 7\}}_1, \underbrace{\{7, 8\}}_1, \underbrace{\{1, 4\}}_3, \underbrace{\{5, 8\}}_3, \underbrace{\{3, 8\}}_5.$$

Nach dem Algorithmus von Kruskal hat ein minimal aufspannender Baum die Kantenmenge

$$\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \{7, 8\}, \{3, 8\}\}.$$

Aufgabe 4.

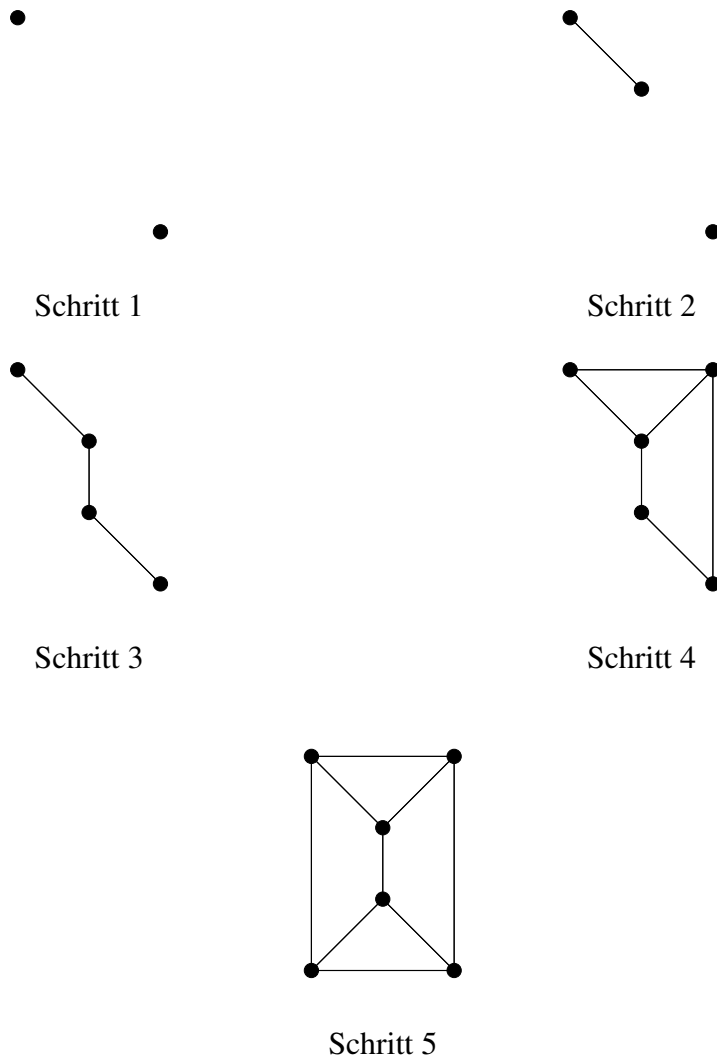
- 6 Punkte (a) Zeigen Sie: $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ ist Valenzsequenz eines Graphen.
Geben Sie einen Graphen mit dieser Valenzsequenz an.

Lösungsvorschlag:**1. Lösungsmöglichkeit: Havel-Hakimi**

3	3	3	3	3	3	
2	2	2	3	3	umsortieren	
3	3	2	2	2		
2	1	1	2	umsortieren		
2	2	1	1			
1	0	1	umsortieren			
1	1	0				
0	0					

Da es einen Graphen mit zwei isolierten Knoten gibt, gibt es nach dem Verfahren von Havel und Hakimi auch einen 3-regulären Graphen mit 6 Knoten.

Einen solchen konstruiert man rückwärts wie folgt:



Der Graph aus Schritt 5 hat die geforderte Eigenschaft.

2. Lösungsmöglichkeit: einfache Graphenklassen betrachten

Ein Graph mit dieser Valenzsequenz ist etwa der vollständige bipartite Graph $K_{3,3}$.

7 Punkte (b) Sei

$$S_n := (3, 3, \dots, 3) \in \mathbb{N}^n$$

die Sequenz mit n Einträgen, bei der jeder Eintrag gleich 3 ist.

Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist S_n Valenzsequenz eines Graphen? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Lösungsvorschlag:

Wir behaupten: S_n ist genau dann Valenzsequenz eines Graphen, wenn n gerade und $n \neq 2$ ist.

1. Beweismöglichkeit:

Falls n ungerade ist, so ist S_n nach dem Handshake-Lemma keine Valenzsequenz eines Graphen.

Falls $n = 2$ ist, so ist S_n keine Valenzsequenz, da ein Graph mit 2 Knoten keinen Knoten vom Grad 3 haben kann.

Falls $n = 0$ ist, so ist $()$ offenbar die Valenzsequenz des leeren Graphen.

Sei nun $n = 4k$ mit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Dann hat der Graph kK_4 , der aus k Kopien des vollständigen Graphen K_4 besteht, die geforderte Valenzsequenz.

Sei schließlich $n = 4k + 2$ mit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Dann hat der Graph $(k - 1)K_4 \cup H$, der aus $k - 1$ Kopien des vollständigen Graphen K_4 und einem Graphen H mit 6 Knoten und Valenzsequenz $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$, der nach (a) existiert, die geforderte Valenzsequenz.

2. Beweismöglichkeit:

Falls n ungerade ist, so ist S_n nach dem Handshake-Lemma keine Valenzsequenz eines Graphen.

Falls $n = 2$ ist, so ist S_n keine Valenzsequenz, da ein Graph mit 2 Knoten keinen Knoten vom Grad 3 haben kann.

Falls $n = 0$ ist, so ist $()$ offenbar die Valenzsequenz des leeren Graphen.

Sei nun $n = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$. Dann betrachten wir einen bipartiten Graphen, dessen Bipartitionen jeweils k Knoten umfassen. Sei die eine Bipartition $\{1, 2, \dots, k\}$, die zweite $\{1', 2', \dots, k'\}$. Als Kanten haben wir $\{i, i'\}$, $\{i, (i + 1)'\}$ und $\{i, (i - 1)'\}$ für alle $1 \leq i \leq k$, wobei wir definieren $(k + 1)' := 1$ und $0' := k$. Dieser Graph ist wegen $k \geq 3$ wohldefiniert und nach Konstruktion 3-regulär, hat also die geforderte Eigenschaft.

Aufgabe 5.

6 Punkte Geben Sie zwei nichtisomorphe Bäume mit jeweils genau 5 Knoten an und beweisen Sie deren Nichtisomorphie.

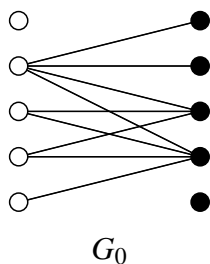
Lösungsvorschlag:

Sei T_1 der vollständige bipartite Graph $K_{1,4}$, diesen nennt man auch *4-Stern*, und T_2 der Weg P_5 . Da beide Graphen T_1 und T_2 kreisfrei und zusammenhängend sind, handelt es sich um Bäume. Ferner besteht die Knotenmenge beider Bäume aus jeweils 5 Knoten.

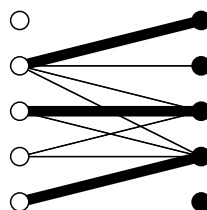
T_1 und T_2 sind nicht isomorph, da T_1 einen Knoten vom Grad 4 enthält, T_2 als Weg jedoch nur Knoten vom Grad ≤ 2 .

Aufgabe 6.

Betrachten Sie folgenden bipartiten Graphen G_0 .



- 2 Punkte (a) Bestimmen Sie ein maximales Matching in G_0 .

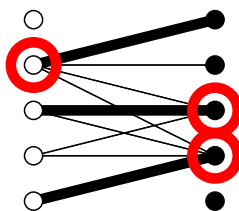
Lösungsvorschlag:

Die Menge der fetten Kanten bildet ein maximales Matching in G_0 .

- 4 Punkte (b) Beweisen Sie die Maximalität des in (a) gefundenen Matchings.

Lösungsvorschlag:

Das Matching aus (a) besteht aus 3 Kanten. Da es eine Knotenüberdeckung der Mächtigkeit 3 in G_0 gibt (s.u., die rot umkreisten Knoten bilden die Knotenüberdeckung), muss das Matching nach dem Satz von König maximal sein.



Aufgabe 7.

5 Punkte Geben Sie die 2-adische Darstellung der Zahl $\frac{4}{9}$ an.

Lösungsvorschlag:

Es gilt

$$\begin{array}{rclclcl} \frac{4}{9} & : & \frac{1}{2} & = & \frac{8}{18} & : & \frac{9}{18} & = & 0 & \text{Rest } \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & : & \frac{1}{4} & = & \frac{16}{36} & : & \frac{9}{36} & = & 1 & \text{Rest } \frac{7}{36} \\ \frac{7}{36} & : & \frac{1}{8} & = & \frac{14}{72} & : & \frac{9}{72} & = & 1 & \text{Rest } \frac{5}{72} \\ \frac{5}{72} & : & \frac{1}{16} & = & \frac{10}{144} & : & \frac{9}{144} & = & 1 & \text{Rest } \frac{1}{144} \\ \frac{1}{144} & : & \frac{1}{32} & = & \frac{2}{288} & : & \frac{9}{288} & = & 0 & \text{Rest } \frac{2}{288} \\ \frac{2}{288} & : & \frac{1}{64} & = & \frac{4}{576} & : & \frac{9}{576} & = & 0 & \text{Rest } \frac{4}{576} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{64} \end{array}$$

Damit haben wir eine Periode gefunden und es gilt:

$$\left(\frac{4}{9}\right)_{(10)} = 0.\overline{011100}_{(2)}.$$

Aufgabe 8.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 3 & 10 & -1 & 27 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 8 & 27 & -5 & 78 \end{pmatrix}.$$

4 Punkte (a) Bestimmen Sie eine LU -Zerlegung von A .

Lösungsvorschlag:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 3 & 10 & -1 & 27 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 8 & 27 & -5 & 78 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 3 & 0 & 8 \\ \hline 3 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 8 & 3 & -5 & 14 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 3 & 0 & 8 \\ \hline 3 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 8 & 3 & -2 & 5 \end{array} \right) \\ \rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 3 & 0 & 8 \\ \hline 3 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 8 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

Die LU -Zerlegung lautet:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 3 & 10 & -1 & 27 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 8 & 27 & -5 & 78 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_U$$

- 1 Punkt (b) Zeigen oder widerlegen Sie: Bei der LU -Zerlegung aus (a) handelt es sich um die Cholesky-Faktorisierung von A .

Lösungsvorschlag:

Bei der LU -Zerlegung aus (a) handelt es sich um die Cholesky-Faktorisierung von A , da $U = L^T$.

- 1 Punkt (c) Zeigen oder widerlegen Sie: 0 ist Eigenwert von A .

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen: 0 ist kein Eigenwert von A .

Beweis: L und U sind als Dreiecksmatrizen mit von Null verschiedenen Diagonaleinträgen regulär. Daher ist A als ihr Produkt auch regulär. Somit ist 0 kein Eigenwert von A .

- 1 Punkt (d) Bestimmen Sie $\|A\|_1$.

Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned} & \|A\|_1 \\ &= \max\{1+3+0+8, 3+10+|-1|+27, 0+|-1|+2+|-5|, 8+27+|-5|+78\} \\ &= \max\{12, 41, 8, 118\} \\ &= 118 \end{aligned}$$

8 Punkte **Aufgabe 9.**

Lösen Sie das folgende nichtlineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & (x-3)^2 + (y-3)^2 \\ \text{unter} & x^2 - y \leq 1 \\ & 3x + y = 9. \end{array}$$

Lösungsvorschlag:

1. Lösungsmöglichkeit: Substitution

Wir substituieren $y = 9 - 3x$. Damit betrachten wir als Zielfunktion

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-3)^2 + ((9-3x)-3)^2 \\ &= x^2 - 6x + 9 + 36 - 36x + 9x^2 \\ &= 10x^2 - 42x + 45 \end{aligned}$$

unter der Nebenbedingung $g(x) \leq 0$ mit

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 - (9-3x) - 1 \\ &= x^2 + 3x - 10. \end{aligned}$$

Aus der Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + 3x - 9$, die sich zu

$$x_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{40}{4}} \in \{2, -5\}$$

ersehen wir, dass der Zulässigkeitsbereich das Intervall $[-5, 2]$ ist.

Wir berechnen

$$f'(x) = 20x - 42.$$

Es gilt also $f'(x) = 0$ genau dann wenn $x = 2.1$. Einziger Kandidat für ein lokales Extremum im Inneren des Intervalls ist also die Stelle 2.1, die Stelle liegt aber gar nicht im Inneren des Intervalls. Das globale Minimum der Funktion liegt also an einer der beiden Randstellen -5 und 2 . Wir vergleichen die Funktionswerte an den beiden Stellen:

$$\begin{aligned} f(2) &= 10 \cdot 2^2 - 42 \cdot 2 + 45 \\ &= 40 - 84 + 45 \\ &= 1, \\ f(-5) &= 10 \cdot (-5)^2 - 42 \cdot (-5) + 45 \\ &= 250 + 210 + 45 \\ &> 1. \end{aligned}$$

Das strikte globale Minimum liegt also an der Stelle 2 . Bezogen auf unser ursprüngliches Problem liegt das strikte globale Minimum bei $(x, y) = (2, 3)$.

2. Lösungsmöglichkeit: Kuhn-Tucker-Bedingungen

Wir definieren

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x - 3)^2 + (y - 3)^2, \\ g(x, y) &= x^2 - y - 1, \\ h(x, y) &= 3x + y - 9. \end{aligned}$$

Somit lautet unser Problem

$$\min f(x, y) \quad \text{unter } g(x, y) \leq 0, h(x, y) = 0.$$

Wir berechnen zunächst die Gradienten und Hessematrizen:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= (2(x - 3), 2(y - 3)), \\ \nabla g(x, y) &= (2x, -1), \\ \nabla h(x, y) &= (3, 1), \\ \nabla^2 f(x, y) &= 2I_2, \\ \nabla^2 g(x, y) &= \text{diag}(2, 0), \\ \nabla^2 h(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

$\nabla g(x, y)$ und $\nabla h(x, y)$ sind genau dann linear abhängig, wenn $x = -\frac{3}{2}$. Aus der Gleichungsnebenbedingung folgt, dass in dem Fall $y = \frac{27}{2}$ ist. Somit sind alle zulässigen Punkte außer $(-\frac{3}{2}, \frac{27}{2})$ reguläre Punkte der Nebenbedingungen.

Sei (x, y) ein zulässiger Punkt, der regulärer Punkt der Nebenbedingungen ist und ein lokales Minimum ist. Dann folgt aus dem Satz über die Kuhn-Tucker-Bedingungen, dass es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und ein $\mu \leq 0$ gibt mit

$$2(x-3) = 2\mu x + 3\lambda, \quad (1)$$

$$2(y-3) = -\mu + \lambda, \quad (2)$$

$$0 = \mu(x^2 - y - 1). \quad (3)$$

Wir betrachten zwei Fälle.

Fall 1: $\mu = 0$

Dann folgt

$$2(x-3) \stackrel{(1)}{=} 3\lambda \stackrel{(2)}{=} 6(y-3),$$

also $x-3 = 3y-9$, d.h. $x = 3y-6$. Setzen wir dies in die Nebenbedingung ein, so erhalten wir

$$9y - 18 + y - 9 = 0,$$

woraus $y = 2.7$ folgt, also $x = 2.1$. Setzen wir dies in die Ungleichungsnebenbedingung ein, so ergibt sich

$$x^2 - y - 1 = 4.41 - 2.7 - 1 = 0.71 > 0,$$

somit ist $(2.1, 2.7)$ eine unzulässige Stelle.

Fall 2: $\mu \neq 0$

Aus (3) folgt dann $x^2 - y - 1 = 0$, d.h. $y = x^2 - 1$. Setzen wir dies in die Gleichungsnebenbedingung ein, so ergibt sich

$$0 = 3x + y - 9 = 3x + x^2 - 10.$$

Die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung ist $\{-5, 2\}$. Als zugehörige y -Werte errechnet man mittels $h(x, y) = 0$ die Werte 24 bzw. 3. Somit finden wir die beiden Kandidaten $(x_1, y_2) = (-5, 24)$ und $(x_2, y_2) = (2, 3)$.

Für den ersten errechnen wir aus (1) $-16 = -10\mu_1 + 3\lambda$ und aus (2) $42 + \mu_1 = \lambda$. Setzen wir dies ein, haben wir

$$-16 = -10\mu_1 + 126 + 3\mu_1,$$

also $\mu_1 = \frac{142}{7} > 0$, d.h. μ_1 erfüllt nicht die Vorzeichenbedingung aus den Kuhn-Tucker-Bedingungen. Damit ist (x_1, y_1) kein Kandidat für ein lokales Minimum.

Für den zweiten Kandidaten errechnen wir aus (1) $4\mu_2 = -2 - 3\lambda$ und aus (2) $\mu_2 = \lambda$. Setzen wir dies ein, haben wir

$$4\mu_2 = -2 - 3\mu_2,$$

also $\mu_2 = -\frac{2}{7} \leq 0$. Damit ist (x_2, y_2) einziger Kandidat für ein lokales Minimum unter allen regulären Punkten.

Für diesen Kandidaten prüfen wir die Bedingungen zweiter Ordnung nach. Der Tangentialraum der aktiven Nebenbedingungen ist der Kern der Matrix

$$\begin{pmatrix} \nabla g(2,3) \\ \nabla h(2,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dieser besteht nur aus dem Nullvektor. Die Matrix

$$L = \nabla^2 f(2,3) - \mu_2 \nabla^2 g(2,3) - \lambda_2 \nabla^2 h(2,3)$$

ist wie jede Matrix trivialerweise positiv definit auf dem Nullraum. Somit liegt ein striktes lokales Minimum an der Stelle $(2,3)$ vor.

Der Zielfunktionswert an der Stelle $(2,3)$ beträgt 1.

Betrachten wir nun den nichtregulären Punkt $(-\frac{3}{2}, \frac{27}{2})$. Dort ist der Zielfunktionswert $\frac{261}{2} > 1$, also handelt es nicht um ein globales Minimum an der Stelle $(-\frac{3}{2}, \frac{27}{2})$.

Da der Zulässigkeitsbereich kompakt ist, handelt es sich jedoch bei $(2,3)$ um ein globales Minimum.

Aufgabe 10.

Sei $f: [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := 2|x-1| - |x-2|$$

für alle $x \in [-10, 10]$.

- 4 Punkte (a) Bestimmen Sie sämtliche lokalen Minima und Maxima von f und begründen Sie, dass die Funktion f strikt unimodal ist.

Lösungsvorschlag:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{falls } -10 \leq x < 1 \\ 3x-4 & \text{falls } 1 \leq x \leq 2 \\ x & \text{falls } 2 < x \leq 10 \end{cases}$$

Die Funktionswerte an den Randpunkten lauten $f(-10) = 10$ und $f(10) = 10$. Desweiteren ist die Funktion stückweise (nicht-konstant) linear. Im Intervall $[-10, 1]$ ist f streng monoton fallend, im Intervall $[1, 10]$ ist f streng monoton wachsend. Daher besitzt f genau zwei lokale Maxima, nämlich an den Randstellen -10 und 10 , und genau ein lokales Minimum, nämlich an der Stelle 1 . Da f genau ein lokales Minimum besitzt, ist f strikt unimodal.

- 4 Punkte (b) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Funktion f ist konvex.

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen, dass f nicht konvex ist.

Sei dazu $x = 1$, $y = 3$ und $\lambda = \frac{1}{2}$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= f(2) \\ &= 2 \\ &> 1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 3 \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \end{aligned}$$

also ist f nicht konvex.

Aufgabe 11.

Sei $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x, y) := 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 1.$$

- 6 Punkte (a) Führen Sie einen Schritt des Newtonverfahrens zur Bestimmung eines lokalen Minimums von F durch, startend von $(0, 0)^\top$.

Lösungsvorschlag:

Wir berechnen den Gradienten

$$\nabla f(x, y) = (4x + 2y + 2, 2x + 2y)$$

und die Hessematrix

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse der Hessematrix errechnet sich als

$$(\nabla^2 f(x, y))^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir starten bei $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und iterieren einmal per Newtonschritt:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1)^\top &= (x_0, y_0)^\top - (\nabla^2 f(x_0, y_0))^{-1} \nabla f(x_0, y_0)^\top \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (-1, 1)^\top \end{aligned}$$

- 2 Punkte (b) Ist nach einem Schritt des Verfahrens bereits ein lokales Minimum von F erreicht? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag:**1. Lösungsmöglichkeit:**

Wegen $\nabla f(x_1, y_1) = (0, 0)$ bricht das Verfahren nach einem Schritt ab und ein stationärer Punkt ist gefunden.

Bei diesem handelt es um ein lokales Minimum, da die Hessematrix in (x_1, y_1) positiv definit ist (wegen

$$(x, y) \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4x^2 + 4xy + 2y^2 = 2(x^2 + x^2 + 2xy + y^2) = 2(x^2 + (x+y)^2) > 0$$

für $(x, y) \neq 0$).

2. Lösungsmöglichkeit:

Da f eine quadratische Funktion mit regulärer Hessematrix ist, bestimmt das Newtonverfahren den eindeutigen stationären Punkt in einem Schritt.

Bei diesem handelt es um ein lokales Minimum, da die Hessematrix in (x_1, y_1) positiv definit ist (wegen

$$(x, y) \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4x^2 + 4xy + 2y^2 = 2(x^2 + x^2 + 2xy + y^2) = 2(x^2 + (x+y)^2) > 0$$

für $(x, y) \neq 0$).

9 Punkte Aufgabe 12.

Finden Sie reelle nichtnegative Zahlen $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ mit

$$\begin{array}{cccccccl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ -x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{array}$$

Lösungsvorschlag:**1. Lösungsmöglichkeit: Zwei-Phasen-Simplexalgorithmus**

Das Starttableau für den Zwei-Phasen-Simplexalgorithmus lautet

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc|c} 2 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ \boxed{2} & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Der erste Pivotschritt, bei dem wir die Wahl der Pivotspalte gemäß Blands Rule vornehmen, ergibt:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc|c} 0 & -2 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \boxed{\frac{3}{2}} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array} \right]$$

Im zweiten Pivotschritt steht die Wahl der Pivotspalte fest, bei der Zeile haben wir jedoch Wahlmöglichkeiten. Wir wählen nach Blands Rule die Zeile der zweiten Nebenbedingung. Der Pivotschritt ergibt:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Wir wählen die Pivotspalte gemäß Blands Rule und erhalten nach dem dritten Pivotschritt:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Das Tableau ist final. Da der optimale Zielfunktionswert der künstlichen Zielfunktion gleich 0 ist, haben wir eine zulässige Lösung gefunden, die somit eine Lösung der Aufgabenstellung ist. Diese lesen wir ab als

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 0, 1).$$

2. Lösungsmöglichkeit: Betrachtung der allgemeinen Lösung

Mit dem Gauss oder Gauss-Jordan-Algorithmus bestimmen wir die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems, wenn auf die Nichtnegativitätsvoraussetzung verzichtet wird. Eine mögliche Rechnung im Gauss-Jordan-Verfahren kann man an Hand der letzten drei Zeilen und der ersten vier und der letzten Spalte der Tableaus des ersten Lösungsvorschlags ansehen, daher verzichten wir auf eine nochmalige Auflistung der gleichen Rechnung. An Hand des letzten Tableaus liest man als Lösungsmenge die Menge

$$\{(1+t, t, -3t, 1-2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

ab. Fordert man nun die Nichtnegativität aller Komponenten der allgemeinen Lösung, so bedeutet dies

$$1+t \geq 0, \quad (4)$$

$$t \geq 0, \quad (5)$$

$$-3t \geq 0, \quad (6)$$

$$1-2t \geq 0. \quad (7)$$

Aus (5) und (6) folgt direkt $t = 0$, also ist $(1, 0, 0, 1)$ die einzig mögliche Lösung. Dass dies tatsächlich eine Lösung ist, folgt wegen $1 \geq 0$.

3. Lösungsmöglichkeit: Raten und Verifizieren

Man sieht sofort, dass $(1, 0, 0, 1)$ eine nichtnegative zulässige Lösung ist, wie man durch Einsetzen in die drei Gleichungen verifiziert.