Aufgabe 1.

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: 3 teilt $(5^n + (-1)^n \cdot 2)$.

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen die Behauptung per Induktion über n. Für $n = 0$ gilt

$$5^n + (-1)^n \cdot 2 = 1 + 2 = 3,$$

was durch 3 teilbar ist. Sei nun $n \geq 1$ und die Behauptung nun für $n-1$ bereits bewiesen. Dann gilt

$$\begin{aligned} 5^n + (-1)^n \cdot 2 &= 5 \cdot 5^{n-1} - (-1)^{n-1} \cdot 2 \\ &= 5 \cdot 5^{n-1} + 5 \cdot (-1)^{n-1} \cdot 2 - 5 \cdot (-1)^{n-1} \cdot 2 - 1 \cdot (-1)^{n-1} \cdot 2 \\ &= 5 \cdot 5^{n-1} + 5 \cdot (-1)^{n-1} \cdot 2 - 6 \cdot (-1)^{n-1} \cdot 2 \\ &= 5 \cdot \underbrace{\left(5^{n-1} + (-1)^{n-1} \cdot 2\right)}_{X} - \underbrace{6 \cdot (-1)^{n-1} \cdot 2}_{3|}. \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung teilt 3 den Term X, also auch $5X$, da 3 offensichtlich 6 und damit den rechten Term teilt, teilt 3 den gesamten Ausdruck. Damit ist die Behauptung für n gezeigt.

Bemerkung: $5 \cdot (-1)^{n-1} \cdot 2 - 5 \cdot (-1)^{n-1} \cdot 2$ wurde hier als sogenannte „nahrhafte Null“ eingesetzt.

Aufgabe 2.

Ein defekter Bankautomat gibt bei einer Abhebung von 100 Euro mit Wahrscheinlichkeit $\frac{197}{200}$ den verbuchten Betrag von 100 Euro aus, mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{200}$ aber 120 Euro und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{200}$ nur 50 Euro.

Wie groß ist der erwartete Gewinn oder Verlust pro Abhebung, wenn Sie oft hintereinander 100 Euro abheben?

Lösungsvorschlag:

Der Erwartungswert des Gewinns beträgt

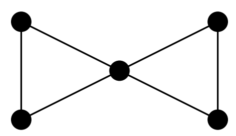
$$E = \frac{197}{200} \cdot 0 + \frac{2}{200} \cdot 20 + \frac{1}{200} \cdot (-50) = -0.05.$$

Pro Abhebung entsteht also ein erwarteter Verlust von 5 Cent.

Aufgabe 3.

(a) Geben Sie ein Beispiel eines Graphen $G = (V,E)$ mit $|V| \geq 3$ an, der eine Eulertour besitzt, aber nicht 2-zusammenhängend ist.

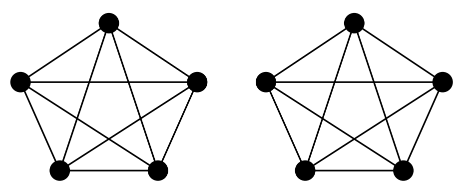
Lösungsvorschlag:



Der Graph hat eine Eulertour, da er zusammenhängend ist und alle Knoten geraden Grad haben. Er ist nicht 2-zusammenhängend, da er in zwei Komponenten zerfällt, wenn man den Knoten vom Grad 4 löscht.

(b) Geben Sie ein Beispiel eines Graphen an, dessen Knoten alle Grad 4 haben, der aber keine Eulertour besitzt.

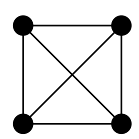
Lösungsvorschlag:



Offensichtlich haben alle Knoten Grad 4. Der Graph hat keine Eulertour, da er nicht zusammenhängend ist.

(c) Geben Sie ein Beispiel eines 2-zusammenhängenden Graphen an, der keine Eulertour besitzt.

Lösungsvorschlag:



Der Graph ist 2-zusammenhängend, da er mindestens 3 Knoten besitzt und man bei Löschen eines beliebigen Knotens ein Dreieck, also einen zusammenhängenden Graphen, erhält. Er hat keine Eulertour, da alle Knoten ungeraden Grad haben.

Aufgabe 4.

Zeigen oder widerlegen Sie: $(8,5,4,4,3,2,2,2,2,2)$ ist Valenzsequenz eines Graphen.

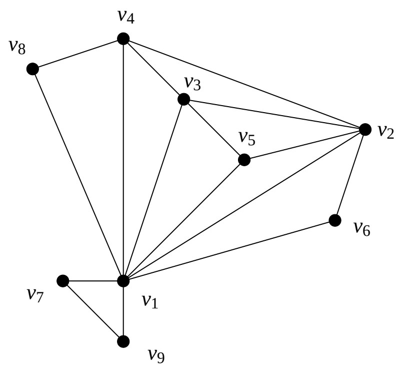
Geben Sie ggf. zwei nicht-isomorphe solche Graphen an. Begründen Sie die Nicht-Isomorphie.

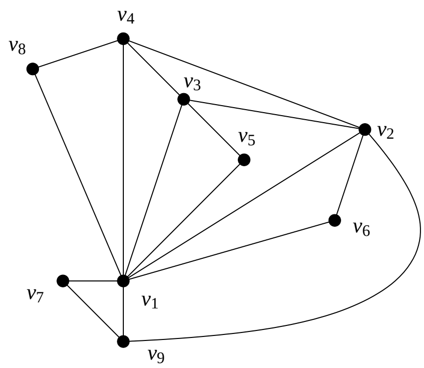
Lösungsvorschlag:

Wir benutzen das Verfahren von Havel-Hakimi:

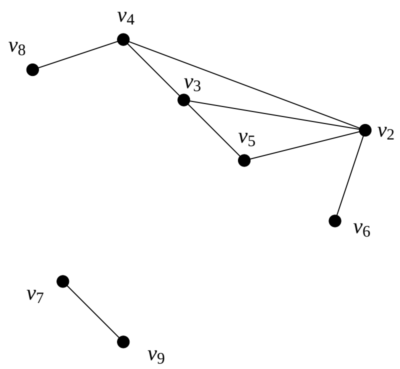
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
8	5	4	4	3	2	2	2	2
	4	3	3	2	1	1	1	1
		2	2	1	0	1	1	1
		v_3	v_4	v_5	v_9	v_7	v_8	v_6
		2	2	1	1	1	1	0
			1	0	1	1	1	0
			v_4	v_8	v_9	v_7	v_5	v_6
			1	1	1	1	0	0
				0	1	1	0	0
				v_7	v_9	v_8	v_5	v_6
				1	1	0	0	0
					0	0	0	0

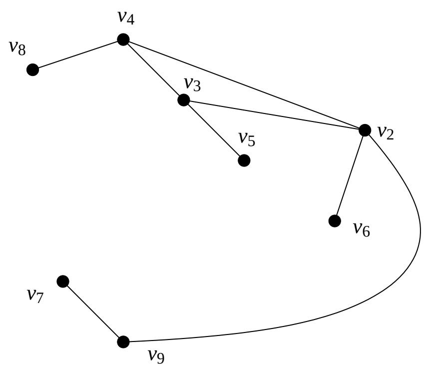
Da es einen Graphen mit 4 isolierten Knoten gibt, gibt es auch einen Graphen, dessen Valenzsequenz die vorgegebene Sequenz ist. Zwei solche Graphen sind etwa:





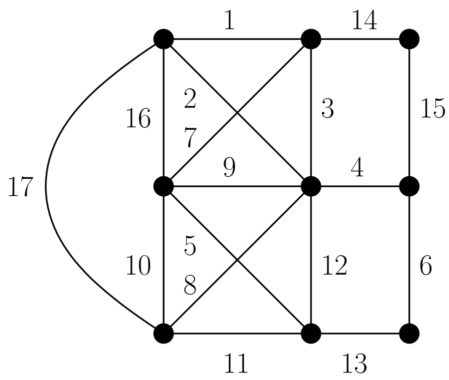
Der linke Graph entsteht dabei, wenn man das Verfahren von Havel-Hakimi rückwärts durchläuft. Der rechte Graph entsteht, wenn man bei Havel-Hakimi rückwärts läuft, aber im Schritt, wo man die Nachbarn von v_2 wählt, abweichend statt v_5 den Knoten v_9 wählt. Die Graphen sind nicht isomorph, da, wenn man in ihnen jeweils den Knoten mit Grad 8 löscht, der Restgraph des linken Graphen unzusammenhängend ist, der des rechten aber zusammenhängend.





Aufgabe 5.

Bestimmen Sie einen minimalen aufspannenden Baum in folgendem Graphen mit Kantengewichten:

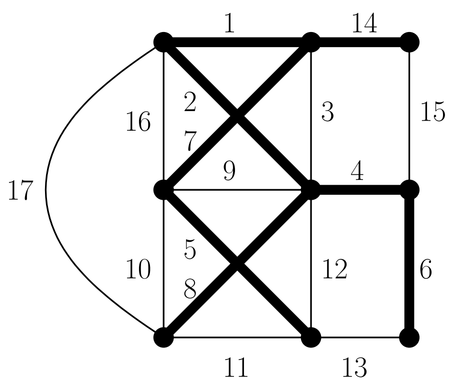


Lösungsvorschlag:

Nach dem Verfahren von Kruskal sortieren wir die Kanten der Größe nach und wählen der Reihe nach die Kanten mit Gewichten

$$1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 14,$$

da alle weiteren Kanten Kreise mit jeweils bereits gewählten Kanten schließen. Somit ergibt sich der folgende minimale aufspannende Baum (fett eingezeichnet):



Dieser hat Gesamtgewicht 47.

Aufgabe 6.

Gegeben sei eine Menge $U = \{A, B, C, D\}$ von Männern und $V = \{1, 2, 3, 4\}$ von Frauen. Ferner seien den Männern folgende Präferenzlisten zugeordnet:

$$A: 1,2,3,4$$
$$B: 1,3,4,2$$
$$C: 2,3,4,1$$
$$D: 1,3,2,4$$

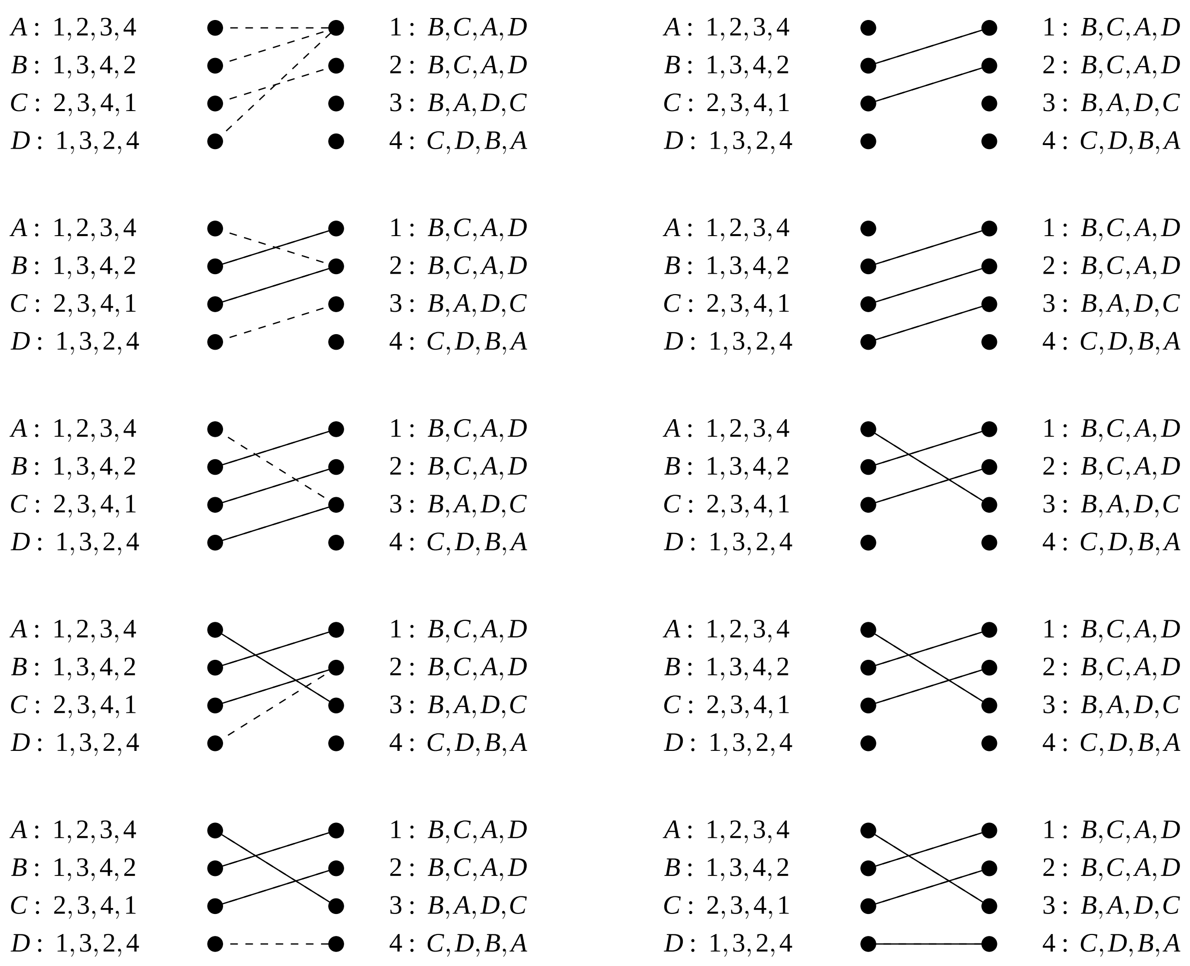
Den Frauen seien die Präferenzlisten

$$1: B,C,A,D$$
$$2: B,C,A,D$$
$$3: B,A,D,C$$
$$4: C,D,B,A$$

zugeordnet. Dabei steht jeweils der begehrteste Partner links.

Bestimmen Sie mit dem Algorithmus Men-Propose-Women-Dispose eine stabile Hochzeit.

Lösungsvorschlag:



Aufgabe 7.

(a) Geben Sie die Definition von „positiv semidefinit“ und von “positiv definit“ an.

Lösungsvorschlag:

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *positiv semidefinit*, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $x^\top Ax \geq 0$.

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *positiv definit*, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$ gilt: $x^\top Ax > 0$.

(b) Sei A eine symmetrische Matrix und L eine linke untere Dreiecksmatrix. Ferner gelte $A = LL^\top$. Zeigen Sie: A is positiv semidefinit.

Lösungsvorschlag:

Nach der Voraussetzung $A = LL^\top$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x^\top Ax = x^\top LL^\top x = (L^\top x)^\top (L^\top x) = \|L^\top x\|_2^2 \geq 0.$$

Aufgabe 8.

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung von A.

Lösungsvorschlag:

Wir berechnen mittels elementarer Zeilenumformungen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit lautet eine LU-Zerlegung

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}.$$

(b) Lösen Sie unter Benutzung der LU-Zerlegung das Gleichungssystem

$$Ax = (1,1,1)^\top$$

Lösungsvorschlag:

Wir bestimmen zunächst die Lösung von $Ly = (1,1,1)^\top$:

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 \\ y_2 &= 1 + y_1 = 2 \\ y_3 &= 1 + y_2 - 2y_1 = 1 \end{aligned}$$

Nun bestimmen wir die Lösung von $Ux = y = (1,2,1)^\top$:

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 \\ x_2 &= 2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 &= \frac{1 - x_2 - 3x_3}{2} = -1 \end{aligned}$$

Somit ist $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 1)$ die Lösung von $Ax = (1,1,1)^\top$.

(c) Bestimmen Sie $\|A\|_1$ und $\|A\|_\infty$.

Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{j \in \{1,2,3\}} \sum_{i=1}^{3} |a_{ij}| = |3| + |-1| + |5| = 9 \\ \|A\|_\infty &= \max_{i \in \{1,2,3\}} \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}| = |4| + |1| + |5| = 10. \end{aligned}$$

Aufgabe 9.

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e^{x_i} \\ \text{unter} \quad & \sum_{i=1}^{n} e^{x_i} = 1 \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag:

Sei

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e^{x_i}$$

und

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} e^{x_i} - 1.$$

Dann lautet das Problem

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{unter} \quad & h(x) = 0, \end{aligned}$$

wobei wir abkürzend $x = (x_1, \ldots, x_n)$ setzen.

Die Einträge des Gradienten von f lauten

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = (x_i + 1)e^{x_i}$$

und die des Gradienten von h

$$\frac{\partial}{\partial x_i} h(x) = e^{x_i}.$$

Da letztere alle positiv sind ist $\nabla h(x) \neq 0$, also sind alle Punkte reguläre Punkte der Nebenbedingungen.
Berechnen wir nun noch die Einträge der Hessematrizen. Es ist

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} f(x) = (x_i + 2)e^{x_i}$$

und für $i \neq j$ gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x) = 0.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} h(x) = e^{x_i}$$

und für $i \neq j$ gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} h(x) = 0.$$

Notwendig dafür, dass an der Stelle x ein Minimum vorliegt, sind die Kuhn-Tucker Bedingungen. Diese lauten hier: Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$(x_i + 1)e^{x_i} = \lambda e^{x_i}.$$

Da $e^{x_i} > 0$ ist, sind diese äquivalent zu

$$x_i + 1 = \lambda$$

bzw.

$$x_i = \lambda - 1.$$

Setzen wir dies in die Nebenbedingung ein, so erhalten wir

$$ne^{\lambda - 1} = 1,$$

also

$$\lambda = 1 + \ln \frac{1}{n} = 1 - \ln n$$

und somit

$$x_i = -\ln n.$$

Unser Kandidat für ein Minimum ist also $(-\ln n, \ldots, -\ln n)$. Prüfen wir nun für diesen Kandidaten die Bedingungen zweiter Ordnung nach. Dazu ist

$$L = \nabla^2 f(x) - \lambda \nabla^2 h(x)$$

auf positive Definitheit zu untersuchen. Nach unserer Rechnung oben ist L eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen

$$(x_i + 2)e^{x_i} - \lambda e^{x_i} = (2 - \ln n)\frac{1}{n} - (1 - \ln n)\frac{1}{n} = \frac{1}{n} > 0.$$

Somit ist L positiv definit und $(-\ln n, \ldots, -\ln n)$ ein striktes lokales Minimum.

Aufgabe 10.

(a) Sei $f:\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ konvex und $g:\mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^m$ linear.

Zeigen Sie, dass dann $f\circ g$ konvex ist.

Lösungsvorschlag:

Für alle $\lambda \in [0,1]$ und alle $x,y \in \mathbb{R}^k$ gilt:

$$\begin{aligned}
(f\circ g)(\lambda x+(1-\lambda)y) &= f(g(\lambda x+(1-\lambda)y))\\
&\overset{g \text{ linear}}{=} f(\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y))\\
&\overset{f \text{ konvex}}{\leq} \lambda f(g(x))+(1-\lambda)f(g(y))\\
&= \lambda(f\circ g)(x)+(1-\lambda)(f\circ g)(y).
\end{aligned}$$

Bemerkung: Da im Kurstext konvexe und lineare Funktionen nur mit Werten in $\mathbb{R}$ vorkommen, gab es auch volle Punktzahl, wenn die Behauptung nur für $m=n=1$ (und beliebiges k) gezeigt wurde.

(b) Zeigen Sie, dass $F:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x,y,z)=(x-2y+z)^2$$

konvex ist.

Lösungsvorschlag:

$F = f\circ g$ mit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=x^2$ und $g:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R},\ g(x,y,z)=x-2y+z$. Da $f''(x)=2>0$, ist f strikt konvex. g ist offensichtlich linear. Also folgt die Behauptung aus (a).

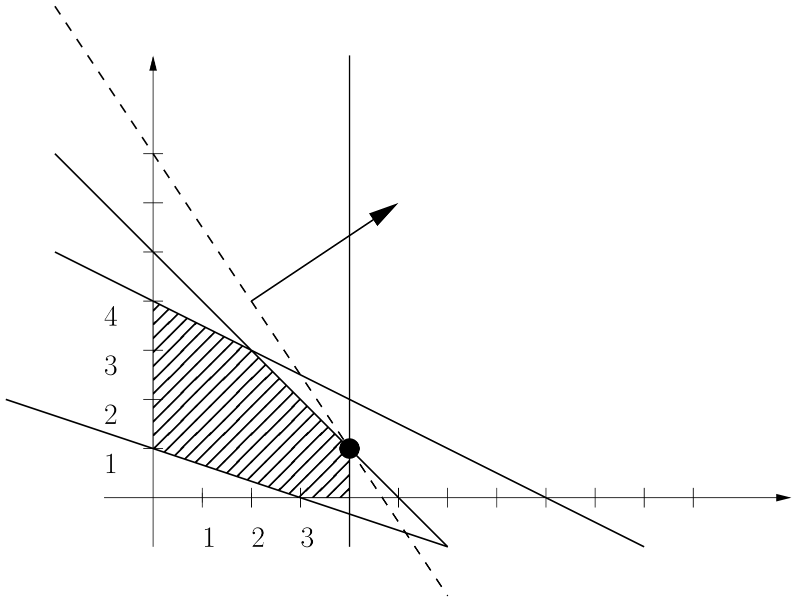
Aufgabe 11.

Lösen Sie mit einer Methode Ihrer Wahl (entweder graphisch oder mit dem Zwei-Phasen-Simplexalgorithmus) folgendes lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrcrcl}
\max & 3x & + & 2y & & \\
\text{unter} & x & + & 2y & \leq & 8\\
 & x & + & y & \leq & 5\\
 & x & & & \leq & 4\\
 & x & + & 3y & \geq & 3\\
 & & & x,y & \geq & 0
\end{array}$$

Lösungsvorschlag:

Eine graphische Lösung sieht wie folgt aus:



Somit erhält man das Optimum als Schnittpunkt der beiden durch $x = 4$ und $x + y = 5$ definierten Geraden, also lautet die Optimallösung $(x, y) = (4, 1)$. Man errechnet den optimalen Zielfunktionswert als $3x + 2y = 14$.

Mittels Simplexalgorithmus löst man die Aufgabe wie folgt. Das Starttableau für Phase I lautet

1	3	0	0	0	-1	0	3
3	2	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	8
1	1	0	1	0	0	0	5
1	0	0	0	1	0	0	4
$\boxed{1}$	3	0	0	0	-1	1	3

Nach Blands Rule pivotieren wir in der ersten Spalte, der Minimalquotiententest liefert uns die letzte Zeile als Pivotzeile. Wir erhalten

0	0	0	0	0	0	-1	0
0	-7	0	0	0	3	-3	-9
0	-1	1	0	0	1	-1	5
0	-2	0	1	0	1	-1	2
0	-3	0	0	1	1	-1	1
1	3	0	0	0	-1	1	3

Damit ist Phase I beendet und eine zulässige Basis $(x, y) = (3, 0)$ gefunden. Durch Streichen der künstlichen Zielfunktion und der Spalte der künstlichen Schlupfvariablen erhalten wir als Starttableau für Phase II:

0	-7	0	0	0	3	-9
0	-1	1	0	0	1	5
0	-2	0	1	0	1	2
0	-3	0	0	1	$\boxed{1}$	1
1	3	0	0	0	-1	3

Wir müssen in der sechsten Spalte pivotieren, der Minimalquotiententest liefert uns die dritte Zeile als Pivotzeile. Nach dem Pivotschritt erhält man:

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 & -3 & 0 & -12 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}$$

Wir müssen in Spalte 2 Zeile 2 pivotieren und erhalten:

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -14 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}$$

Das Tableau ist optimal, da alle reduzierten Kosten nichtpositiv sind. Wir lesen die Optimallösung $(x,y) = (4,1)$ und den optimalen Zielfunktionswert 14 ab.

Aufgabe 12.

Ein Bäcker hat einen Vorrat von 3kg Hefe, 70kg Weizenmehl, 50kg Roggenmehl, 20kg Zucker und 30l Milch. Er möchte damit verschiedene Backwaren herstellen. In der folgenden Tabelle ist angegeben, wieviel g (bzw. bei Milch wieviel ml) er von den einzelnen Zutaten für die Herstellung einer jeweiligen Backware benötigt.

	Hefe	Weizenmehl	Roggenmehl	Zucker	Milch
Brötchen	2	40	5	1	0
Hefezopf	5	150	0	25	75
Milchbrötchen	4	40	0	5	20
Röggelchen	4	0	50	2	20

Der Bäcker muss ferner mindestens 700 Brötchen, mindestens 100 Röggelchen und mindestens 100 Milchbrötchen backen. Er will aber höchstens 500 Milchbrötchen und höchstens 1000 Röggelchen backen. Er erzielt folgenden Gewinn in Cent pro verkaufter Backware:

	Brötchen	Hefezopf	Milchbrötchen	Röggelchen
Gewinn	5	20	6	5

Der Bäcker kann davon ausgehen, dass er alles verkaufen kann was er backt. Ihm stellt sich die Frage: Wieviel Stück soll er von jeder Backware backen, um den Gewinn zu maximieren? Modellieren Sie das Problem als lineares Programm (ohne es zu lösen). (Gehen Sie in Ihrem Modell davon aus, dass der Bäcker auch gebrochene Teile seiner Backwaren verkaufen kann.)

Lösungsvorschlag:
Als Variablen nehmen wir
$x_B =$ Anzahl der Brötchen
$x_H =$ Anzahl der Hefezöpfe
$x_M =$ Anzahl der Milchbrötchen und
$x_R =$ Anzahl der Röggelchen,
die der Bäcker backen soll. Das Problem lautet dann

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\max & 5x_B & + & 20x_H & + & 6x_M & + & 5x_R & & \\
\text{unter} & 2x_B & + & 5x_H & + & 4x_M & + & 4x_R & \leq & 3000 \\
 & 40x_B & + & 150x_H & + & 40x_M & & & \leq & 70000 \\
 & 5x_B & & & & & + & 50x_R & \leq & 50000 \\
 & x_B & + & 25x_H & + & 5x_M & + & 2x_R & \leq & 20000 \\
 & & & 75x_H & + & 20x_M & + & 20x_R & \leq & 30000 \\
 & x_B & & & & & & & \geq & 700 \\
 & & & & & & & x_R & \geq & 100 \\
 & & & & & x_M & & & \geq & 100 \\
 & & & & & x_M & & & \leq & 500 \\
 & & & & & & & x_R & \leq & 1000 \\
 & & & & & & & x_B, x_H, x_M, x_R & \geq & 0.
\end{array}
$$