6 Punkte **Aufgabe 1.**

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: 3 teilt $(5^n + (-1)^n \cdot 2)$.

Tipp: Je nach gewähltem Lösungsansatz könnte $-1-2=-3$ oder $-1-5=-6$ hilfreich sein.

5 Punkte **Aufgabe 2.**

Ein defekter Bankautomat gibt bei einer Abhebung von 100 Euro mit Wahrscheinlichkeit $\frac{197}{200}$ den verbuchten Betrag von 100 Euro aus, mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{200}$ aber 120 Euro und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{200}$ nur 50 Euro.

Wie groß ist der erwartete Gewinn oder Verlust pro Abhebung, wenn Sie oft hintereinander 100 Euro abheben?

Aufgabe 3.

2 Punkte (a) Geben Sie ein Beispiel eines Graphen $G = (V,E)$ mit $|V| \geq 3$ an, der eine Eulertour besitzt, aber nicht 2-zusammenhängend ist.

2 Punkte (b) Geben Sie ein Beispiel eines Graphen an, dessen Knoten alle Grad 4 haben, der aber keine Eulertour besitzt.

2 Punkte (c) Geben Sie ein Beispiel eines 2-zusammenhängenden Graphen an, der keine Eulertour besitzt.

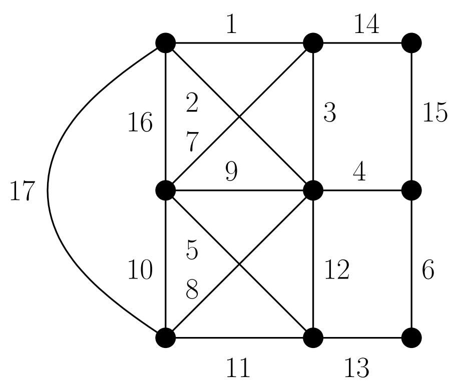
10 Punkte **Aufgabe 4.**

Zeigen oder widerlegen Sie: $(8,5,4,4,3,2,2,2,2)$ ist Valenzsequenz eines Graphen.

Geben Sie ggf. zwei nicht-isomorphe solche Graphen an. Begründen Sie die Nicht-Isomorphie.

6 Punkte **Aufgabe 5.**

Bestimmen Sie einen minimalen aufspannenden Baum in folgendem Graphen mit Kantengewichten:



6 Punkte **Aufgabe 6.**

Gegeben sei eine Menge $U = \{A, B, C, D\}$ von Männern und $V = \{1, 2, 3, 4\}$ von Frauen. Ferner seien den Männern folgende Präferenzlisten zugeordnet:

$$\begin{aligned} A&: 1,2,3,4 \\ B&: 1,3,4,2 \\ C&: 2,3,4,1 \\ D&: 1,3,2,4 \end{aligned}$$

Den Frauen seien die Präferenzlisten

$$\begin{aligned} 1&: B, C, A, D \\ 2&: B, C, A, D \\ 3&: B, A, D, C \\ 4&: C, D, B, A \end{aligned}$$

zugeordnet. Dabei steht jeweils der begehrteste Partner links.
Bestimmen Sie mit dem Algorithmus Men-Propose-Women-Dispose eine stabile Hochzeit.

Aufgabe 7.

1 Punkt (a) Geben Sie die Definition von „positiv semidefinit“ und von „positiv definit“ an.

5 Punkte (b) Sei A eine symmetrische Matrix und L eine linke untere Dreiecksmatrix. Ferner gelte $A = LL^\top$. Zeigen Sie: A is positiv semidefinit.

Aufgabe 8.

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

4 Punkte (a) Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung von A.

4 Punkte (b) Lösen Sie unter Benutzung der LU-Zerlegung das Gleichungssystem

$$Ax = (1, 1, 1)^\top$$

2 Punkte (c) Bestimmen Sie $\|A\|_1$ und $\|A\|_\infty$.

12 Punkte **Aufgabe 9.**

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e^{x_i} \\ \text{unter} \quad & \sum_{i=1}^{n} e^{x_i} = 1 \end{aligned}$$

Hinweise: Zum Ableiten Produktregel benutzen. Ferner gilt $\frac{\partial}{\partial x_i} e^{x_i} = e^{x_i}$.

Aufgabe 10.

5 Punkte (a) Sei $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ konvex und $g : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^m$ linear.

Zeigen Sie, dass dann $f \circ g$ konvex ist.

2 Punkte (b) Zeigen Sie, dass $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x,y,z) = (x - 2y + z)^2$$

konvex ist.

Hinweis: (b) kann man ohne Rechnen bearbeiten.

9 Punkte **Aufgabe 11.**

Lösen Sie mit einer Methode Ihrer Wahl (entweder graphisch oder mit dem Zwei-Phasen-Simplexalgorithmus) folgendes lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & 3x & + & 2y & & \\ \text{unter} & x & + & 2y & \leq & 8 \\ & x & + & y & \leq & 5 \\ & x & & & \leq & 4 \\ & x & + & 3y & \geq & 3 \\ & & & x,y & \geq & 0 \end{array}$$

7 Punkte **Aufgabe 12.**

Ein Bäcker hat einen Vorrat von 3kg Hefe, 70kg Weizenmehl, 50kg Roggenmehl, 20kg Zucker und 30l Milch. Er möchte damit verschiedene Backwaren herstellen. In der folgenden Tabelle ist angegeben, wieviel g (bzw. bei Milch wieviel ml) er von den einzelnen Zutaten für die Herstellung einer jeweiligen Backware benötigt.

	Hefe	Weizenmehl	Roggenmehl	Zucker	Milch
Brötchen	2	40	5	1	0
Hefezopf	5	150	0	25	75
Milchbrötchen	4	40	0	5	20
Röggelchen	4	0	50	2	20

Der Bäcker muss ferner mindestens 700 Brötchen, mindestens 100 Röggelchen und mindestens 100 Milchbrötchen backen. Er will aber höchstens 500 Milchbrötchen und höchstens 1000 Röggelchen backen. Er erzielt folgenden Gewinn in Cent pro verkaufter Backware:

	Brötchen	Hefezopf	Milchbrötchen	Röggelchen
Gewinn	5	20	6	5

Der Bäcker kann davon ausgehen, dass er alles verkaufen kann was er backt. Ihm stellt sich die Frage: Wieviel Stück soll er von jeder Backware backen, um den Gewinn zu maximieren? Modellieren Sie das Problem als lineares Programm (ohne es zu lösen). (Gehen Sie in Ihrem Modell davon aus, dass der Bäcker auch gebrochene Teile seiner Backwaren verkaufen kann.)